

# Estudio de Reacciones de Espalación mediante modelos de preequilibrio

Jorge Pereira Conca

12 de septiembre de 2001



# Índice General

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Mecanismos de reacción inducidos por proyectiles ligeros a energías bajas e intermedias</b> | <b>5</b>  |
| 1.1      | Evidencias experimentales de la existencia de reacciones de preequilibrio . . . . .            | 7         |
| <b>2</b> | <b>Reacciones de preequilibrio</b>   | <b>11</b> |
| <b>3</b> | <b>Modelos de preequilibrio</b>  | <b>13</b> |
| <b>4</b> | <b>Código Monte Carlo basado en modelos de preequilibrio</b>                                   | <b>17</b> |
| 4.1      | Modelo Híbrido . . . . .   | 17        |
| 4.2      | Modelo GDH . . . . .   | 23        |
| 4.3      | Necesidad de desarrollar un código Monte Carlo . . . . .                                       | 25        |
| 4.4      | Código Monte Carlo . . . . .   | 28        |
| 4.4.1    | Estructura lógica del programa . . . . .   | 28        |
| 4.4.2    | Parámetros utilizados en la simulación . . . . .   | 30        |
| 4.5      | Resultados preliminares . . . . .  | 32        |
| 4.6      | Refinamientos del programa . . . . .   | 35        |
| 4.7      | Resultados . . . . .   | 37        |
| <b>A</b> | <b>Densidad de estados para un número fijo de partículas y huecos</b>                          | <b>41</b> |
| A.1      | El modelo de espacio equidistante: cálculo exacto . . . . .                                    | 41        |
| A.2      | El modelo de espacio equidistante: solución aproximada . . . . .                               | 44        |
| <b>B</b> | <b>Evaluación de la sección eficaz media <math>\bar{\sigma}</math> nucleón-nucleón</b>         | <b>49</b> |



# Introducción

En las reacciones de espalación, un proyectil, generalmente constituido por un nucleón incide sobre un núcleo blanco a energías inferiores al umbral de producción de mesones. Durante la reacción, el nucleón incidente interactúa con los nucleones que constituyen el blanco, transfiriéndoles energía y momento de tal manera que estos nucleones pueden abandonar el núcleo o interactuar con otros nucleones. Mediante este número creciente de interacciones la energía del proyectil incidente se va extendiendo a través de todo el núcleo, de manera que al final de la secuencia el núcleo alcanza un estado de núcleo termalizado, a partir del cual comenzará a desexcitarse hasta alcanzar su estado fundamental.

Las reacciones de espalación gozan de un interés especial en el estudio de los mecanismos de reacción. Uno de los mayores intereses de estas reacciones es que nos permiten excitar la materia nuclear induciendo muy poco momento angular. Por tanto, estas reacciones son una herramienta óptima para estudiar la materia nuclear en condiciones extremas de temperatura. Adicionalmente dichas reacciones también nos proporcionan información sobre la interacción nucleón-nucleón y más en concreto, cómo dicha interacción se modifica cuando tiene lugar en el medio nuclear. Por otro lado, las reacciones de espalación presentan gran cantidad de aplicaciones en diferentes campos de la Física Nuclear.

Por ejemplo, en el marco de la Astrofísica Nuclear estas reacciones juegan un papel trascendental en la interpretación de las curvas de abundancia de los núcleos producidos en procesos de nucleosíntesis estelar. En algunos casos, estos procesos tienen lugar en escenarios explosivos de tipo supernova, donde los núcleos producidos son expulsados al exterior a gran velocidad, de tal manera que pueden interactuar con el medio interestelar (mayoritariamente hidrógeno y helio) mediante reacciones de espalación. Como consecuencia, las abundancias observadas no se corresponden con las debidas al proceso de

núcleosíntesis original, lo cual implica la necesidad de entender en profundidad el mecanismo de espalación, a fin de corregir este efecto.

Por otro lado, las reacciones de espalación inducidas sobre blancos pesados constituye también una fuente de neutrones de gran intensidad. Tales fuentes pueden tener diversas aplicaciones como la transmutación de residuos radiactivos en ADS (reactores asistidos por aceleradores), el estudio de materiales o la investigación fundamental con neutrones.

Otra importante aplicación de este tipo de reacciones es la producción de haces exóticos mediante la técnica *Isol* (Isotope separation on line). Un haz intenso de protones incide a energías medias sobre un blanco pesado interactuando con éste a través de reacciones de espalación. Los residuos de la reacción pueden ser posteriormente acelerados para ser utilizados como haces exóticos.

Una de las más recientes aplicaciones del estudio de las reacciones de espalación está relacionada con la radioterapia con protones. En esta técnica se hacen incidir haces de protones a energías bajas  $E_{inc} < 100 MeV$  sobre las zonas tumorales. Por otro lado, los nucleones incidentes pueden interactuar con los núcleos de los átomos que constituyen el tejido mediante reacciones de espalación. Durante la reacción, estos núcleos emiten nucleones, que pueden a su vez interactuar con otros átomos dañando incluso zonas de tejido sano. Para evaluar este efecto es necesario conocer con gran precisión el mecanismo de emisión de nucleones en las reacciones de espalación.

En este trabajo se pretende describir el mecanismo de reacción que gobierna la interacción de proyectiles ligeros sobre un núcleo blanco a energías inferiores a 200 MeV. Las reacciones de espalación se producen en dos fases: en la primera (fase rápida o de preequilibrio) el proyectil incidente interactúa con los nucleones que constituyen el núcleo blanco transfiriéndoles su energía. Como consecuencia de ello se inicia una cascada de interacciones nucleón-nucleón, en la que se puede producir la emisión de partículas. Al final de esta fase la energía del proyectil está distribuída homogéneamente a través de todo el núcleo, dejándolo en un estado excitado (estado de *preequilibrio*). En la segunda fase (fase lenta), el núcleo en su estado de núcleo termalizado comienza a desexcitarse mediante la emisión de partículas (evaporación) o radiación electromagnética. La distribución isotópica de los residuos producidos en este tipo de procesos depende en gran medida de la naturaleza del núcleo en el estado de preequilibrio (prefragmento).

En concreto, en este trabajo se presenta un nuevo código Monte Carlo que trata de describir la fase rápida del proceso de preequilibrio a partir de la

cascada intranuclear, basándose en algunos modelos analíticos ya existentes. La utilización de la técnica Monte Carlo permite seguir de una manera natural la secuencia de estados que atraviesa el prefragmento antes de alcanzar el estado de núcleo termalizado. De este modo, resulta muy sencillo tener en cuenta la emisión múltiple de partículas, permitiendo calcular la distribución de energía de excitación y masa de los prefragmentos. De hecho esta es la principal ventaja que ofrece este programa frente a otros modelos analíticos.

El trabajo se divide en varias partes: Primeramente se presentará de un modo breve los diferentes mecanismos de reacción conocidos hasta el momento. A continuación, se mostrarán los distintos modelos de preequilibrio, para a continuación proceder a describir en detalle el código desarrollado así como los resultados obtenidos.





# Capítulo 1

## Mecanismos de reacción inducidos por proyectiles ligeros a energías bajas e intermedias

Hasta mediados de los años 60 se consideraban dos mecanismos diferentes de reacciones nucleares a bajas energías ( $E_{inc} \leq 100\text{MeV}$ ): *reacciones de núcleo compuesto* y *reacciones directas*. El concepto de *reacciones de núcleo compuesto* fue inicialmente propuesto por Bohr en 1936 [1] para explicar los resultados medidos en varias reacciones inducidas por neutrones de baja energía [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Según él, en este tipo de reacciones la colisión del neutrón incidente con el blanco deriva en la formación de un *núcleo compuesto* en el que la energía del proyectil incidente está distribuída homogéneamente (núcleo termalizado). Posteriormente este núcleo puede desexcitarse a su estado fundamental mediante la emisión (evaporación) de nucleones, la emisión de fotones o fisionando. El hecho más destacable en este tipo de procesos es la pérdida de correlación entre los estados finales e iniciales de la reacción, que se traducen en las siguientes características:

- Tiempo de reacción  $t \simeq 10^{-18}\text{s}$
- Distribución isotrópica de las partículas emitidas durante la desexcitación.
- Espectro energético de partículas emitidas caracterizado por una distribución de Maxwell centrada en un valor proporcional a la temperatura del núcleo compuesto excitado.

## CAPÍTULO 1. MECANISMOS DE REACCIÓN INDUCIDOS POR PROYECTILES LIGEROS A ENERGÍAS BAJAS E INTERMEDIAS

---

El mecanismo de reacción de núcleo compuesto fue ampliamente estudiado por Weisskopf y Ewing en 1940 [8] quienes propusieron un modelo estadístico para explicar la evaporación de partículas desde estados continuos del núcleo compuesto. Posteriormente Hauser y Feshbach [9] perfeccionaron el modelo incluyendo la desexcitación del núcleo compuesto desde niveles discretos.

En el caso de las reacciones directas, la primera propuesta fue presentada por Oppenheimer y Phillips en 1935 [10] quienes intentaron dar una explicación a las distribuciones angulares de los protones emitidos en las reacciones (d,p) a baja energía. En esta reacción se consideró que el deuterio simplemente transfería un neutrón al blanco, produciéndose la posterior emisión del protón restante en direcciones muy próximas a la del proyectil incidente. Posteriormente Serber [11] propuso un modelo para explicar este tipo de reacciones a las que denominó reacciones de *stripping*. Según este modelo, la deflexión angular del protón saliente refleja su distribución de momento en el interior del deuterio. Por lo tanto las características de los productos de la reacción están fuertemente correlacionados con el estado inicial del sistema.

De una manera general, el término *reacción directa* se utiliza para designar aquellos procesos que conectan los estados iniciales y finales en una reacción nuclear sin la formación de estados intermedios. De un modo más concreto, estas reacciones se pueden identificar atendiendo a las siguientes características:

- Tiempo de reacción  $t \simeq 10^{-22} s$ .
- Distribución angular de las partículas emitidas fuertemente pronunciada en direcciones cercanas a la del proyectil incidente.
- Masa del núcleo residual muy próxima a la del blanco.
- Partículas emitidas a altas energías con la excitación de niveles de baja energía del núcleo residual.

Otros tipos de reacciones directas, además de las *stripping* son las reacciones *pick-up* que serían las inversas a las anteriores, las reacciones de *scattering elástico* que pueden ser explicadas con modelos simples de tipo óptico, las reacciones de *scattering inelástico* en las que el proyectil excita estados colectivos del blanco y reacciones de *transferencia de carga* en las que la partícula emitida tiene aproximadamente la misma masa que el proyectil pero distinta carga de modo que el efecto neto es la transferencia de carga. Debido a sus

## 1.1. EVIDENCIAS EXPERIMENTALES DE LA EXISTENCIA DE REACCIONES DE PREEQUILIBRIO

---

características, las reacciones directas proporcionan uno de los métodos de investigación de estructura nuclear más potentes.

Los mecanismos de reacción directa y de núcleo compuesto predicen dependencias de la sección eficaz en energía y ángulo muy diferentes, de modo que pueden ser fácilmente distinguibles. Primeramente, en el caso de las reacciones de núcleo compuesto la desexcitación se produce a través de la fisión, la emisión de fotones o de partículas de baja energía, es decir neutrones de unos cuantos MeV y partículas cargadas con energía ligeramente superior a la barrera coulombiana. Por otro lado, en las reacciones directas las partículas emitidas son altamente energéticas, dejando al núcleo residual en un estado excitado de baja energía. En segundo lugar, en el caso de las reacciones de núcleo compuesto las partículas emitidas durante la desexcitación siguen una distribución angular isotrópica en el centro de masas, mientras que en el caso de las reacciones directas esta emisión está fuertemente pronunciada hacia delante. En tercer lugar, las reacciones de núcleo compuesto no son selectivas, de modo que los estados excitados son poblados según su peso estadístico. Por el contrario, en el caso de las reacciones directas los estados del blanco y del núcleo residual están fuertemente correlacionados según su estructura.

Con todo lo expuesto hasta ahora, cabría esperar que cualquier reacción nuclear podría ser clasificada según estos dos procesos, atendiendo a los diferentes observables experimentales (espectros energéticos, distribuciones angulares, distribución de masas del núcleo residual, etc.). Sin embargo, la acumulación de datos experimentales correspondientes a reacciones nucleares con energías del proyectil incidente cada vez mayores puso de manifiesto la existencia de un tercer mecanismo de reacción.

## 1.1 Evidencias experimentales de la existencia de reacciones de preequilibrio

A partir de 1947 se empezaron a acumular ciertas medidas experimentales [12, 13, 14, 15, 16, 17] correspondientes al estudio de reacciones nucleares que no podían ser explicadas en el marco de los dos modelos de reacción propuestos hasta entonces. Atendiendo a las características de estos dos mecanismos de reacción se esperan dos tipos diferentes de distribución de masas de los núcleos residuales. En el caso de las reacciones directas la

## CAPÍTULO 1. MECANISMOS DE REACCIÓN INDUCIDOS POR PROYECTILES LIGEROS A ENERGÍAS BAJAS E INTERMEDIAS

masa de estos residuos será muy próxima a la del blanco inicial, mientras que en el caso de las reacciones de núcleo compuesto diferirá en una cantidad  $\Delta A \simeq E/(\bar{B}_x + 2\bar{T})$  (donde  $E$  es la energía de excitación del núcleo compuesto y  $\bar{B}_x$  y  $\bar{T}$  son la energía separación y cinética media de los nucleones emitidos). Sin embargo, los residuos de espalación medidos por Cunningham [12] y Seaborg [13] producidos en la interacción de deuterones y partículas alfa con ciertos núcleos mostraron una distribución de masas de residuos continua, que se extendía desde la masa del núcleo compuesto  $A$  hasta masas  $A - \Delta A$ .

El espectro energético de las partículas emitidas muestra claramente tres contribuciones diferentes (ver figura 1.1).

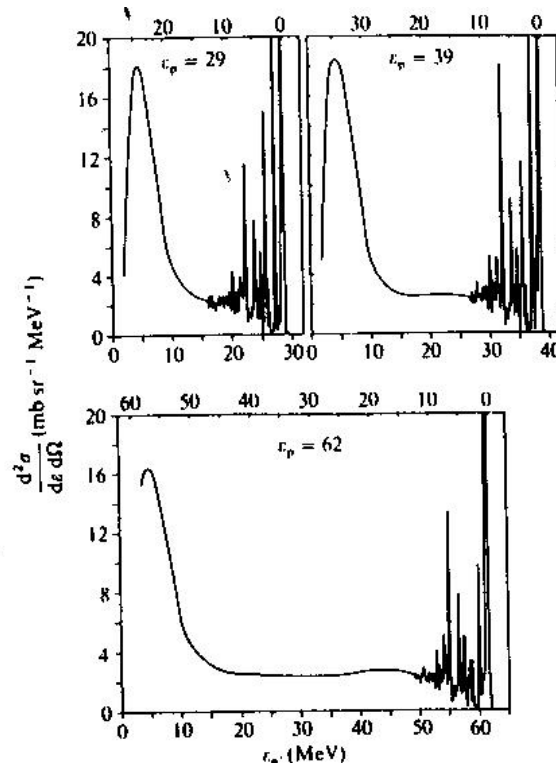


Figura 1.1: *Espectro energético de protones emitidos en la reacción de núcleos de  $^{54}\text{Fe}$  con protones incidentes a 29, 39 y 62 MeV [14, 15].*

A bajas energías se observa una distribución de Maxwell correspondiente a las partículas evaporadas por el núcleo compuesto. A altas energías aparecen picos monoenergéticos correspondientes a reacciones directas en las que se

## 1.1. EVIDENCIAS EXPERIMENTALES DE LA EXISTENCIA DE REACCIONES DE PREEQUILIBRIO

produce la excitación de estados de baja energía del núcleo residual. Entre estas dos zonas se observan distribuciones continuas del espectro energético que dependen muy débilmente de la masa del blanco. Esta independencia en masa se muestra en la figura 1.2.

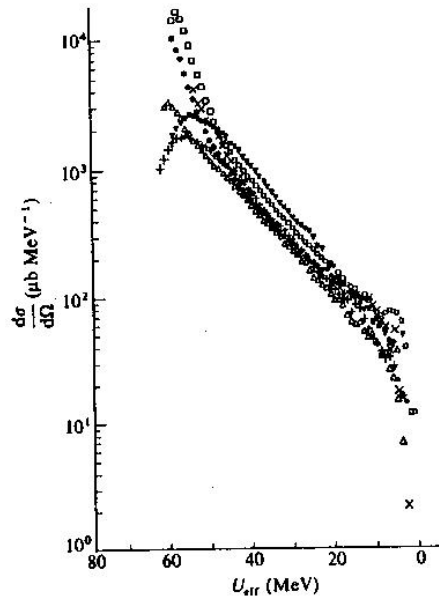


Figura 1.2: *Espectro energético de la reacción  $(p, \alpha x)$  en función de la energía de excitación. Los núcleos blanco se identifican según los siguientes símbolos:  $(\times)$   $^{27}\text{Al}$ ,  $(\bullet)$   $^{59}\text{Co}$ ,  $(\square)$   $^{90}\text{Zr}$ ,  $(\triangle)$   $^{197}\text{Au}$ ,  $(\nabla)$   $^{208}\text{Pb}$  y  $(+)$   $^{232}\text{Th}$  [17].*

Otro observable experimental que pone de manifiesto la presencia de un nuevo mecanismo de reacción es la medida de la distribución angular de las partículas emitidas durante la reacción. En algunos casos se observó una distribución fuertemente pronunciada hacia delante, contrariamente a lo esperable en el caso de reacciones de núcleo compuesto, pero que por otro lado no podía ser atribuida al mecanismo de reacción directa.



## Capítulo 2

# Reacciones de preequilibrio

La acumulación de datos experimentales imposibles de interpretar en el marco de las teorías de reacciones directas y de núcleo compuesto puso de manifiesto la existencia de un tercer mecanismo de reacción al que se denominó *reacciones de preequilibrio*. Este mecanismo reunía características propias de los dos tipos de reacción conocidos hasta el momento. Para describir este nuevo proceso, Serber [18] propuso una hipótesis según la cual la interacción entre un nucleón incidente (proyectil) con un núcleo (blanco) podía ser descrita en términos de interacciones a dos cuerpos entre el proyectil incidente y los nucleones del blanco, de modo que la reacción transcurriría a través de una *casca* de interacciones nucleón-nucleón. Mediante estas interacciones, la energía del proyectil incidente se iría transfiriendo paulatinamente a un número creciente de nucleones hasta estar uniformemente distribuída por todo el núcleo (termalización). De este modo se distinguen dos fases de reacción: una fase rápida correspondiente a la cascada de interacciones nucleón-nucleón, durante la cual la partícula incidente puede emerger del núcleo blanco con una energía reducida, así como otros nucleones golpeados por el proyectil cerca de la superficie (emisión de preequilibrio) y una fase lenta, al final de la cascada, en la cual el núcleo termalizado se desexcita mediante la evaporación de partículas <sup>1</sup>. La figura 2.1 muestra esquemáticamente los diferentes caminos que puede seguir una reacción nuclear.

---

<sup>1</sup>Esta fase puede ser tratada estadísticamente según los modelos de Weisskop [8] y Hauser [9].

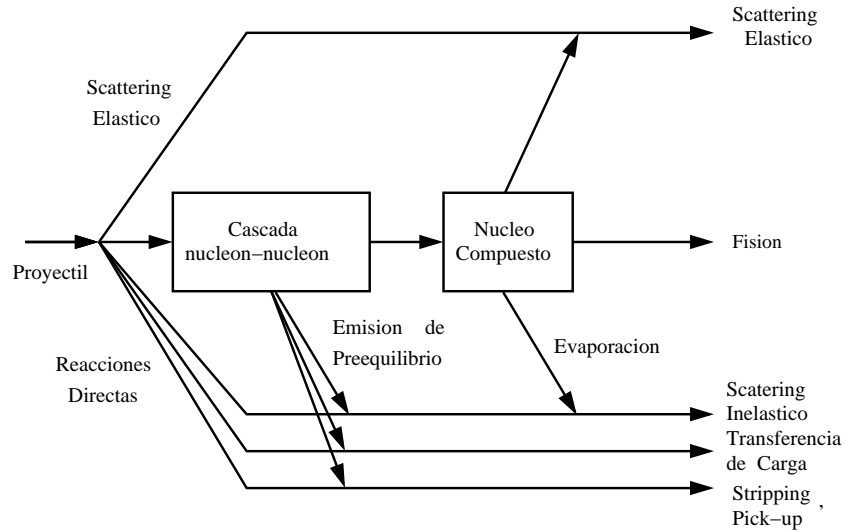


Figura 2.1: *Procesos directo, de preequilibrio y de núcleo compuesto presentes en una reacción nuclear.*

Posteriormente, Block y Feshbach [19] presentaron el concepto de *estados doorway*. La idea era que durante la fase rápida de cascada de interacciones nucleón-nucleón, el núcleo iba pasando por una serie de estados excitados que implicaban solo algunos grados de libertad. Estos estados tendrían una complejidad intermedia entre los estados de partícula simple descritos por el modelo óptico y los estados de núcleo compuesto propuestos por Bohr. A medida que la reacción avanza, se va excitando un mayor número de grados de libertad de manera que aumenta la complejidad de estos estados (*estados hallway*). La naturaleza de los *estados doorway* puede ser diferente, por ejemplo, pueden ser estados de partícula-hueco (excitones), estados rotacionales o estados vibracionales. Si se asume que la evolución desde los estados de partícula simple a estados de núcleo compuesto se debe a una interacción residual que puede ser descrita por un potencial a dos cuerpos, entonces en el caso de reacciones inducidas por un nucleón incidente (espalación) estos *estados doorway* tiene una configuración de dos partículas un hueco.



# Capítulo 3

## Modelos de preequilibrio

Antes de comenzar a explicar el código desarrollado en este trabajo, conviene dar una breve explicación sobre los modelos de preequilibrio existentes hasta el momento.

En esta sección se presentarán algunos de los modelos desarrollados para describir los mecanismos de excitación y desexcitación de un núcleo durante la fase rápida del proceso de preequilibrio. Como ya se ha mencionado, la idea sobre la que se fundamentan todos ellos es la hipótesis de que la interacción de un proyectil con un núcleo blanco excita en primer lugar aquellos estados con una configuración simple (*estados doorway*). Posteriormente el núcleo atravesará estados de mayor complejidad (*estados hallway*) que son excitados desde los *estados doorway* mediante interacciones nucleón-nucleón sucesivas. De este modo es natural pensar que esta secuencia de estados de complejidad creciente derivará en un estado de núcleo compuesto.

Una de las motivaciones principales de todos los modelos de preequilibrio propuestos es la reproducción del espectro energético de las partículas emitidas desde el núcleo (a partir de ahora prefragmento) durante la reacción. Este observable nos servirá como base para discutir de forma breve las principales diferencias entre los distintos modelos. La expresión analítica de estos espectros puede escribirse de forma condensada usando la siguiente ecuación:

$$P(\epsilon_i) = \sigma_R \sum_Q W(E, Q) p(i, \epsilon_i | E, Q) \quad (3.1)$$

donde  $\sigma_R$  es la sección eficaz de reacción,  $W(E, Q)$  es la probabilidad de que el núcleo se encuentre en el estado  $Q$  con energía de excitación  $E$  y  $p(i, \epsilon_i | E, Q)$  es la probabilidad de que el núcleo emita una partícula  $i$  con

energía  $\epsilon_i$  desde el estado  $Q$ . Durante los primeros instantes de la reacción  $t \sim 0$  la principal contribución a  $W(E, Q)$  procede de los *estados doorway*; posteriormente los *estados hallway* de mayor complejidad pasarán a jugar el papel principal y finalmente, a tiempos  $t \rightarrow \infty$ ,  $W(E, Q) \rightarrow 1$  para el estado fundamental del núcleo residual.

Los modelos de preequilibrio que se discutirán, difieren en la forma en que se describen los estados que contribuyen a  $W(E, Q)$ .

En los modelos de *cascada intranuclear (INC)* [14, 20, 21, 22, 23], los estados del prefragmento vienen definidos por las coordenadas de posición y momento de los nucleones excitados durante la cascada de interacciones. Los estados del sistema evolucionan en el tiempo debido a las interacciones nucleón-nucleón, cuya probabilidad depende del recorrido libre medio de los nucleones excitados.

En los modelos de *excitón* [24], *híbrido* [25] y *GDH* [26], el prefragmento está caracterizado por el número de partículas y huecos excitados en cada intervalo de la cascada. Además, como se verá más adelante en todos ellos se supone que la energía de excitación del núcleo se reparte de forma equiprobable sobre todas las posibles configuraciones de estos grados de libertad.

En el modelo de *Boltzman Master Equation* [27] propuesto por Harp, Miller y Berne, los estados del prefragmento están caracterizados por los números de ocupación de los estados de partícula independiente, los cuales evolucionan en el tiempo debido a las interacciones nucleón-nucleón.

Estos modelos también se diferencian en la forma en que se describe el decaimiento del prefragmento por emisión de partículas excitadas al continuo.

En el modelo *INC*, la emisión de partículas ocurre cuando uno de los nucleones excitados por encima de la energía de Fermi alcanza la superficie del prefragmento. El hecho de considerar en todo momento las trayectorias de cada uno de los nucleones implica la violación del principio de incertidumbre, razón por la cual este tipo de modelos es esencialmente clásico.

En los modelos de *excitón*, *híbrido*, *GDH* y de *Boltzman Master Equation*, el decaimiento al continuo se determina a partir del *principio de balanza detallada* de la Mecánica Estadística. En el caso del modelo de *excitón*, este principio se aplica a un sistema estadístico formada por varios núcleos con el mismo número de partículas y huecos excitados. De este modo, si consideramos dos sistemas estadísticos, uno formado por un grupo de prefragmentos con  $p$  partículas y  $h$  huecos excitados y el otro por un grupo de residuos con  $p - 1$  partículas y  $h$  huecos excitados y una partícula en el continuo, entonces

---

la tasa de emisión de partículas al continuo con energía  $\epsilon_c$  vendrá dada por:

$$\lambda(\epsilon_c | E, p, h) = \frac{1}{\rho_{p,h}(E)} \left( \frac{v\sigma_{inv}(\epsilon_c)}{\Omega} \right) \rho_{p-1,h}(E_r) \rho_c(\epsilon_c) d\epsilon_c \quad (3.2)$$

En esta ecuación  $\rho_{p,h}(E)$  y  $\rho_{p-1,h}(E_r)$  son las densidades de estados para el sistema de prefragmentos y de residuos respectivamente, calculados por Ericson [28]<sup>1</sup>,  $E$  es la energía de excitación de los prefragmentos,  $E_r = E - \epsilon_c - B_x$  es la energía de excitación de los residuos,  $B_x$  y  $v$  son, respectivamente la energía de ligadura y la velocidad de la partícula emitida,  $\sigma_{inv}$  es la sección eficaz del proceso inverso a la emisión (captura de la partícula en el continuo por el sistema de residuos),

$$\rho_c(\epsilon_c) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \frac{(2s+1)m\epsilon_c \Omega}{v} \quad (3.3)$$

es la densidad de estados en el continuo accesibles por el nucleón emitido y finalmente  $\Omega$  es el volumen del laboratorio.

En los otros tres modelos, la emisión de partículas desde el prefragmento al continuo se determina aplicando el principio de balanza detallada entre un sistema formado por prefragmentos con un nucleón excitado con energía  $\epsilon = \epsilon_c + B_x$  en su interior y un sistema formado por residuos con un nucleón con energía  $\epsilon_c$  en el continuo. De este modo, la tasa de emisión al continuo viene dada por:

$$\lambda(\epsilon_c | \epsilon) = \frac{1}{g(\epsilon)} \left( \frac{v\sigma_{inv}(\epsilon_c)}{\Omega} \right) \rho_c(\epsilon_c) d\epsilon_c \quad (3.4)$$

donde  $g(\epsilon)$  es la densidad de estados de partícula independiente a energía  $\epsilon$  en el interior del prefragmento.

Finalmente, en todos los modelos discutidos las interacciones nucleón-nucleón que determinan la evolución de la reacción a través de los distintos estados viene definida por el recorrido libre medio  $\bar{\lambda}$  de los nucleones en el interior del núcleo. Este parámetro depende de la densidad de materia nuclear y de la sección eficaz promedio nucleón-nucleón  $\bar{\sigma}$ .

Cada uno de estos modelos fue desarrollado para poder interpretar una serie de observables medidos en varias reacciones nucleares bajo diferentes condiciones.

---

<sup>1</sup>Para una discusión más detallada sobre la utilización de estas densidades y su cálculo consúltese la sección 5.1 y el apéndice A respectivamente

Así, el modelo de *INC* ha mostrado una gran concordancia con los resultados experimentales correspondientes a reacciones de espalación a altas energías. Sin embargo, las predicciones de este modelo empeoran a medida que se reduce la energía del proyectil incidente. Una de las razones de esta limitación estriba en la propia naturaleza clásica del modelo que considera a los nucleones como partículas puntuales con trayectorias rectilíneas. Esta aproximación es tanto menos precisa cuanto mayor es la longitud de onda de la partícula, es decir, cuanto menor es su energía.

Para cubrir la laguna dejada por el modelo de *INC* en las reacciones de espalación a baja energía Griffin desarrolló su modelo de *excitón*. El mayor logro de este modelo es su capacidad para predecir espectros energéticos y funciones de excitación, unidos a su gran simplicidad.

En cuanto a los modelos *híbrido* y *GDH*, no son sino alternativas al modelo de *excitón* que fueron creados con la intención de mejorar los resultados de éste. De hecho estos dos modelos comparten la idea de caracterizar los estados nucleares por el número de excitones, así como la hipótesis de equiprobabilidad propuesta por Griffin.

Finalmente, el modelo de *Boltzman Master Equation* es el apropiado para el estudio de reacciones nucleares entre dos iones pesados, en las cuales la distribución de energía de excitación entre las partículas y huecos de los dos iones fusionados, difiere sustancialmente de la predicha bajo las hipótesis de equiprobabilidad que caracteriza a los modelos de *excitón*, *híbrido* y *GDH*.

# Capítulo 4

## Código Monte Carlo basado en modelos de preequilibrio

Como ya se adelanta en el título, en esta sección se hablará del código Monte Carlo desarrollado en este trabajo. Primeramente, es conveniente destacar que dicho código ha sido diseñado aplicando fundamentalmente las ideas de los modelos *híbrido* y *GDH*, los cuales a su vez están basados en el modelo de *excitón*. Esto permite seguir de un modo natural, la secuencia seguida por el prefragmento durante la fase de termalización. Además, como se discutirá más adelante, el desarrollo de este código permite tener un control sobre todos los parámetros utilizados en la simulación. Por lo tanto, antes de entrar en los detalles técnicos del programa conviene asentar bien las bases sobre las que se sustenta, para lo cual se procederá a discutir las ideas fundamentales de los modelos mencionados anteriormente.

### 4.1 Modelo Híbrido

El modelo híbrido surge de la intención de mejorar las predicciones del modelo de *excitón* para los espectros energéticos de las partículas emitidas durante las reacciones de espalación a energías medias y bajas. Como ya se ha discutido, en estos modelos se asume que el nucleón incidente penetra en el núcleo blanco, interaccionando con los nucleones del mar de Fermi. Como resultado de la primera interacción, el núcleo (prefragmento) se excita a un estado caracterizado por una configuración interna en la que se tienen dos partículas y un hueco excitados de modo que el número de excitones es igual a tres ( $n_0 = 3$ ). Posteriormente, debido a la cascada intranuclear el prefragmento atravesará estados nucleares caracterizados por un número creciente

## CAPÍTULO 4. CÓDIGO MONTE CARLO BASADO EN MODELOS DE PREEQUILIBRIO

de excitones hasta alcanzar el estado final de núcleo compuesto. Teniendo en cuenta que la cascada intranuclear se desarrolla a través de interacciones a dos cuerpos entre los nucleones, la variación del número de excitones de un estado a otro está restringida según las siguientes reglas de selección:

$$\Delta n = 0, \pm 2 \quad \Delta p = 0, \pm 1 \quad \Delta h = 0, \pm 1 \quad (4.1)$$

A fin de simplificar la caracterización de los estado nucleares, Griffin propuso una hipótesis según la cual todas las configuraciones entre  $p$  partículas y  $h$  huecos que tengan la misma energía total de excitación son equivalentes. De este modo, cada estado nuclear vendrá caracterizado únicamente por el número de excitones  $n$  y la energía total de excitación  $E$  del núcleo. A cada uno de estos estados le corresponderá una densidad de estados internos que dependerá del número de combinaciones posibles entre  $p$  partículas y  $h$  huecos, tales que la energía total sea  $E$ . Esto se puede entender observando la figura 4.1 en la que se muestran tres maneras de combinar dos partículas y un hueco obteniendo la misma energía total. La hipótesis de equiprobabilidad permite utilizar la densidad de estados internos  $\rho_{p,h}(E)$  para calcular la distribución de energía de los excitones. Esta densidad viene dada por la expresión <sup>1</sup>:

$$\rho_{p,h}(E) = g \frac{(gE)^{n-1}}{p!h!(n-1)!} \quad (4.2)$$

donde  $g$  es la densidad de estados de partícula independiente.

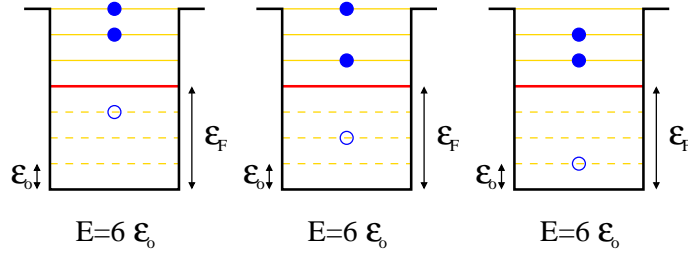


Figura 4.1: Representación esquemática de tres maneras diferentes de repartir la energía total de excitación  $E = 6\epsilon_0$  entre dos partículas ( $\bullet$ ) y un hueco ( $\circ$ ), donde  $\epsilon_F$  es la energía de Fermi y  $\epsilon_0 = g^{-1}$ .

<sup>1</sup>Para un estudio detallado del cálculo de esta densidad consúltese el apéndice A.

Continuando con el proceso de termalización del prefragmento, en cada paso de la cascada se debe considerar dos tipos diferentes de decaimiento, uno debido a la emisión de partículas al continuo  $\lambda_c(\epsilon)$  y otro debido a la interacción entre dos nucleones  $\lambda_{nn'}(\epsilon)$ . Como resultado de esta interacción, el número de excitones puede variar de tres maneras diferentes: aumentando en dos unidades  $\lambda_{nn+2}$  (excitación de un nuevo par partícula-hueco), permaneciendo invariable  $\lambda_{nn}$  o disminuyendo en dos unidades  $\lambda_{nn-2}$  (recombinación de un par partícula-hueco). En la mayoría de las situaciones se cumple la desigualdad  $\lambda_{nn-2} \ll \lambda_{nn} \ll \lambda_{nn+2}$  de modo que se puede asumir  $\lambda_{nn-2} \sim \lambda_{nn} \sim 0$  (hipótesis de *never come back*). La competición entre los modos de decaimiento al continuo e interno determinará el espectro energético de las partículas emitidas durante la fase de preequilibrio. En el caso del modelo *híbrido*, este espectro viene caracterizado por la probabilidad de emisión de una partícula desde el estado  $(n, E)$ :

$${}_n P_x(\epsilon) = [{}_n X_x \cdot \wp_n(\epsilon)] R_c(\epsilon) D_n \quad (4.3)$$

En esta ecuación  ${}_n X_x$  es el número de partículas excitadas por encima del nivel de Fermi ( $\epsilon > \epsilon_F$ ) dentro del prefragmento en el estado  $(n, E)$ ,  $\wp_n(\epsilon)$  es la probabilidad de encontrar una partícula excitada con energía entre  $\epsilon$  y  $\epsilon+d\epsilon$  y el resto de los excitones  $(p-1+h)$  repartiéndose la energía de excitación residual  $E_r = E - \epsilon$ ,  $R_c(\epsilon)$  es la tasa de emisión de partículas excitadas al continuo y finalmente  $D_n$  es el *factor de desocupación*. A continuación se explicará en detalle cada uno de estos elementos.

### Número de partículas excitadas ${}_n X_x$

En el caso de las reacciones de espalación, el proyectil incidente es un nucleón, de tal manera que después de la primera interacción con el núcleo el número de excitones será  $n_0 = 3$ . A su vez, el número inicial de partículas excitadas después de esta primera interacción será  ${}_3 X = 2$ . De este modo, teniendo en cuenta la hipótesis de *never-come-back* el número de partículas excitadas en los siguientes estados será una unidad mayor que en el estado anterior, es decir  ${}_3 X = 2, {}_5 X = 3, {}_7 X = 4, \dots$  (nótese que al pasar de un estado a otro  $\Delta n = +2$ ). Ahora bien, en el modelo *híbrido* se consideran en todo momento el isospín de los nucleones excitados, de modo que habrá que distinguir el número de protones excitados  $\pi$  del de neutrones  $\nu$ . Teniendo esta dependencia en el isospín en cuenta se considera que en una muestra estadística de prefragmentos, el número de protones y neutrones del estado inicial

es en promedio igual a uno. Además, este número aumentará en promedio en media unidad desde un estado al siguiente. Resumiendo, asumiendo que  ${}_nX = {}_nX_\pi + {}_nX_\nu$  se obtendrá:

$$\begin{array}{lll} {}_3X_\pi = 1 & {}_3X_\nu = 1 & {}_3X = 2 \\ {}_5X_\pi = 1.5 & {}_5X_\nu = 1.5 & {}_5X = 3 \\ {}_7X_\pi = 2 & {}_7X_\nu = 2 & {}_7X = 4 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

### Probabilidad de encontrar una partícula excitada con energía $\epsilon$ , $\wp(\epsilon)$

La probabilidad de encontrar una partícula excitada con energía  $\epsilon$  dentro del prefragmento en el estado  $(n, E)$  se puede calcular mediante la expresión:

$$\wp(\epsilon) = \frac{N_n(\epsilon, E_r)}{N_n(E)} \quad (4.4)$$

En esta expresión,  $N_n(\epsilon, E_r)$  es el número de formas en que se pueden ordenar  $n$  excitones de manera que uno de ellos tenga energía  $\epsilon$  dejando el resto de la energía  $E_r$  distribuída entre los restantes  $n - 1$  excitones. Por otro lado, la cantidad  $N_n(E)$  representa el número total de combinaciones entre  $n$  excitones con energía de excitación total  $E$ . Blann demostró que la cantidad  $N_n(E)$  puede aproximarse con bastante precisión por  $\rho_n(E)/g$  [25], de tal manera que:

$$\frac{N_n(\epsilon, E_r)}{N_n(E)} \simeq \frac{1}{{}_nX} \frac{\rho_{p-1,h}(E - \epsilon)}{\rho_{p,h}(E)} \quad (4.5)$$

donde las densidades de niveles para el prefragmento antes y después de la excitación de la partícula vienen dadas por:

$$\rho_{p,h}(E) = g \frac{(gE)^{n-1}}{p!h!(n-1)!} \quad (4.6)$$

$$\rho_{p-1,h}(E - \epsilon) = g \frac{[g(E - \epsilon)]^{n-2}}{(p-1)!h!(n-2)!} \quad (4.7)$$

Según estas expresiones, la probabilidad de que una de las  ${}_nX$  partículas excitadas ( $\epsilon > \epsilon_F$ ) en el estado  $(n, E)$  tenga energía  $\epsilon$  será:

$$\wp(\epsilon) = \frac{n-1}{E} \left(1 - \frac{\epsilon}{E}\right)^{n-2} \quad (4.8)$$



### Tasa de emisión al continuo $R_c(\epsilon)$

Como ya se ha mencionado, en cada paso de la cascada intranuclear el prefragmento puede decaer bien internamente debido a la interacción entre dos nucleones  $\lambda_+$  o emitiendo un nucleón al continuo  $\lambda_c$ . Así, la tasa de emisión de una partícula excitada con energía  $\epsilon$  al continuo desde un estado  $(n, E)$  vendrá dada por:

$$R_c(\epsilon) = \frac{\lambda_c(\epsilon)}{\lambda_c(\epsilon) + \lambda_+(\epsilon)} \quad (4.9)$$

Para calcular el modo de decaimiento al continuo, Blann utilizó el principio de balanza detallada según se explicó en la sección 4 resultando:

$$\lambda_c(\epsilon) = \sqrt{\frac{2\epsilon_c}{m}} \sigma_{inv}(\epsilon_c) \frac{\rho_c(\epsilon_c)}{g\Omega} \quad (4.10)$$

donde  $\epsilon_c = \epsilon - B_x$ , siendo  $B_x$  la energía de ligadura para la partícula considerada. En cuanto al decaimiento interno, éste se puede calcular a partir del recorrido libre medio  $\bar{\lambda}$  mediante la expresión:

$$\lambda_+(\epsilon) = \frac{v}{\bar{\lambda}} = v\rho\bar{\sigma} \quad (4.11)$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula en el interior del núcleo,  $\rho$  es la densidad de materia nuclear y  $\bar{\sigma}$  es la sección eficaz promedio de interacción nucleón-nucleón corregida por el principio de Pauli [29].

Tomando los valores propuestos por Blann [25], la expresión final para el decaimiento interno vendrá dada por:

$$\lambda_+(\epsilon)(s^{-1}) = \frac{1.4 \times 10^{21}\epsilon - 6.0 \times 10^{18}\epsilon^2}{f} \quad (4.12)$$

donde  $f$  es un factor que en principio toma el valor 1.

### Factor de desocupación $D_n$

Como ya se ha discutido, en el modelod híbrido se asume que el número de partículas excitadas en un estado  $n$  es una unidad superior respecto al estado anterior  $n - 2$ . Sin embargo, durante el proceso de preequilibrio el prefragmento puede emitir partículas al continuo, de forma que el número de nucleones excitados en un cierto estado  $n$  puede ser inferior al que se

obtendría aumentando sucesivamente en cada estado este número en una unidad desde el estado inicial  $n_0$  al estado  $n$  en cuestión. Para tener en cuenta este hecho, se define el factor de desocupación  $D_n$  para el estado  $n$  que permite considerar la fracción de nucleones excitados que no han sido emitidos al continuo desde estados anteriores.

$$D_n = \prod_{n=n_0}^{n-2} \frac{\lambda_+(\epsilon)}{\lambda_+(\epsilon) + \lambda_c(\epsilon)} \quad (4.13)$$

## Discusión de los resultados

La expresión 4.3 permite calcular la probabilidad de emisión de una partícula con energía  $\epsilon$  desde un estado  $(n, E)$  del prefragmento. Teniendo en cuenta que la emisión de partículas se puede realizar desde cualquier estado, el cálculo de la probabilidad total de emisión de partículas  $P_x(\epsilon)$  durante la termalización del prefragmento será igual a la suma de todas las contribuciones de cada uno de los estados por los que transcurre la reacción, desde el estado inicial  $n_0$  hasta el de núcleo compuesto  $\bar{n}$ :

$$P_x(\epsilon)d\epsilon = \sum_{n=n_0}^{\bar{n}} P_x(\epsilon)d\epsilon \quad (4.14)$$

donde el sumatorio se incrementa en dos unidades de un estado al siguiente. El valor de  $\bar{n}$  se corresponde con el número medio de excitones calculado a partir de la distribución de Fermi [30]:

$$\bar{n} = \sqrt{2gE} \quad (4.15)$$

El modelo *híbrido* permite reproducir con bastante precisión los espectros de energía de nucleones durante el proceso de preequilibrio para numerosas reacciones. Sin embargo, en algunas de ellas el modelo subestima la tasa de emisión tanto más cuanto más energéticas son las partículas emitidas. La figura 4.2 muestra los resultados obtenidos con este modelo para la reacción  ${}^{93}\text{Nb}(\alpha, p)$ . Como se puede ver, la concordancia con los datos experimentales mejora notablemente al reducir el decaimiento interno, es decir favoreciendo la tasa de emisión al continuo  $R_c$ . Una de las posibles explicaciones de este desacuerdo radica en el hecho de que el modelo *híbrido* no tiene en cuenta la geometría del núcleo blanco, de forma que las interacciones periféricas son tratadas de igual modo que las centrales.

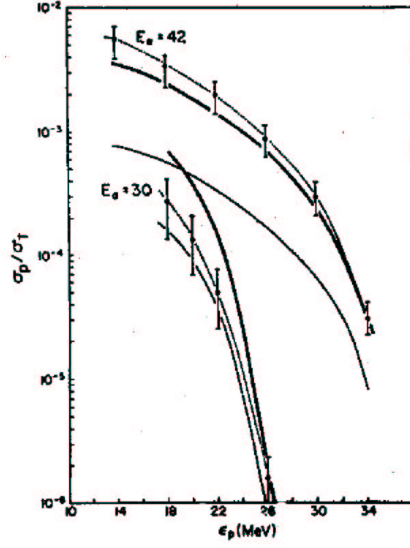


Figura 4.2: Espectros medidos [31, 32] y calculados para la reacción  ${}^{93}\text{Nb}(\alpha, p)$  a  $E_\alpha = 30$  y  $42\text{MeV}$ . Resultados calculados con el parámetro  $f=1$  se corresponden con la línea fina. Las líneas gruesas muestran los resultados con  $f=5$  [25].

## 4.2 Modelo GDH

Para solventar las deficiencias del modelo *híbrido* Blann propuso un refinamiento del mismo en el que se calcula la probabilidad de emisión de partículas como una suma de contribuciones procedentes de todos los canales de entrada con parámetro de impacto definido. Esta nueva formulación derivó en el modelo *GDH* (Geometry Dependent Hybrid model) en el que se incorporan las características superficiales del núcleo blanco para parámetros de impacto grande. De este modo el espectro de emisión de partículas durante el preequilibrio vendrá dado por:

$$\frac{d\sigma_x(\epsilon)}{d\epsilon} = 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) T_l P_x(l, \epsilon) \quad (4.16)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de De Broglie,  $l$  es el momento angular orbital del proyectil en unidades de  $\hbar$ ,  $T_l$  es el coeficiente de transmisión dado por el

## CAPÍTULO 4. CÓDIGO MONTE CARLO BASADO EN MODELOS DE PREEQUILIBRIO

---

modelo óptico y  $P_x(l, \epsilon)$  equivale a  $P_x(\epsilon)$  con todas las cantidades que entran en su expresión evaluadas localmente sobre las trayectorias correspondientes al parámetro de impacto  $b \simeq l/k$ , donde  $k$  es el momento lineal del proyectil.

Según Blann y Vonach [33], la inclusión de efectos geométricos en el modelo *GDH* se manifiesta de dos maneras:

- Por un lado la difusión de la densidad de materia nuclear en la superficie del núcleo provocará que para las interacciones periféricas (parámetro de impacto grande), el recorrido libre medio sea considerablemente superior al correspondiente a trayectorias centrales. Esto provocará una reducción del decaimiento interno  $\lambda_+$  según la ecuación 4.11 favoreciendo la emisión de las partículas más periféricas.
- El segundo efecto geométrico tiene una naturaleza mucho más sutil. Si se tiene en cuenta que la energía de Fermi del núcleo blanco varía localmente de acuerdo con la expresión:

$$\epsilon_F(r) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{3\pi^2}{2} \rho(r) \right]^{2/3} \quad (4.17)$$

entonces se tiene que esta energía tenderá a cero para las interacciones más periféricas. Esto se traduce en una limitación de la energía de excitación con la que pueden “contribuir” los huecos excitados ( $\epsilon < \epsilon_F$ ) a la energía total  $E$  del prefragmento. Como resultado de esto, la energía total  $E$  se reparte mayoritariamente entre las partículas excitadas ( $\epsilon > \epsilon_F$ ) que tendrán en promedio una energía de excitación superior.

En la figura 4.3 se comparan los resultados obtenidos con este nuevo modelo con los predichos por el modelo *híbrido*. Como se puede ver, el acuerdo del modelo *GDH* con los resultados experimentales aumenta significativamente, especialmente en la zona más energética del espectro.

Tanto el modelo *híbrido* como el *GDH* proporcionan una descripción estadística del proceso de preequilibrio de forma que los espectros energéticos se pueden determinar fácilmente a partir de expresiones ananlíticas (ecuaciones 4.3 y 4.14). Por otro lado, una descripción de este tipo impide el seguimiento detallado de la secuencia de estados que atraviesa el prefragmento durante el proceso de preequilibrio, lo cual supone una complicación a la hora de evaluar la emisión múltiple de partículas, así como la distribución de masa y energía de los prefragmentos.

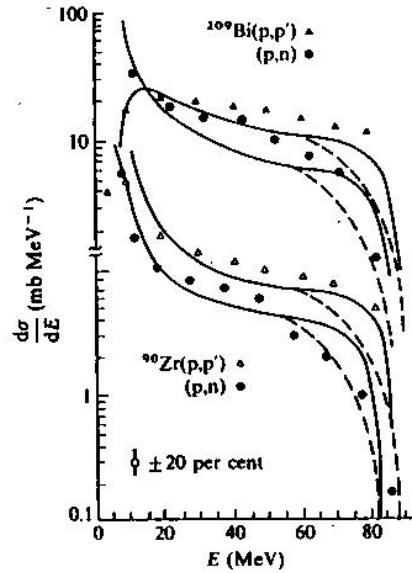


Figura 4.3: Comparación entre resultados experimentales [34, 35] y calculados [33] para el espectro de emisión de protones y neutrones en las reacciones  $p(90\text{MeV}) + 90\text{Zr}$  y  $p(90\text{MeV}) + {}^{209}\text{Bi}$ . La línea continua muestra los resultados obtenidos con el modelo GDH+cálculo estadístico de evaporación; la línea a trazos se corresponde con el modelo híbrido+cálculo estadístico de evaporación [33].

### 4.3 Necesidad de desarrollar un código Monte Carlo

Como ya se ha mencionado, en los modelos descritos hasta ahora, no se incluye la emisión de más de una partícula excitada durante el proceso de termalización. Esto se refleja en el hecho de que a la hora de determinar la probabilidad de emisión de partículas excitadas desde cada uno de los estados  $n$ , (ecuación 4.3) la energía de excitación total del prefragmento es igual a la energía inicial  $E$  introducida por el proyectil. Esto se puede entender si se considera un muestra estadística de prefragmentos durante el proceso de preequilibrio. Cada uno de estos prefragmentos va atravesando una serie de estados  $n$  hasta que se emite una partícula desde uno de ellos, momento en

## CAPÍTULO 4. CÓDIGO MONTE CARLO BASADO EN MODELOS DE PREEQUILIBRIO

el que se detiene la secuencia. De esta manera, la probabilidad de emisión de una partícula excitada desde un estado  $n$  se determina promediando sobre la cantidad de prefragmentos de la muestra estadística inicial que han alcanzado dicho estado sin emitir un nucleón (ver figura 4.4).

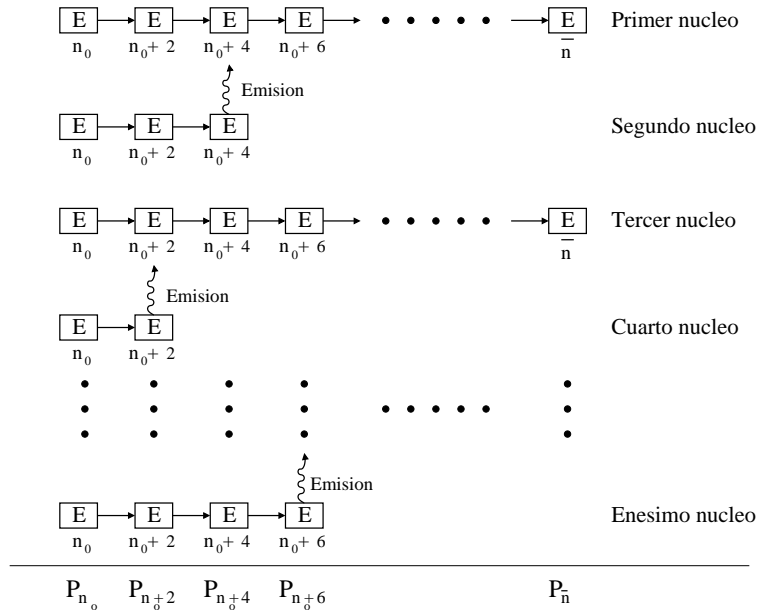


Figura 4.4: *Secuencia de preequilibrio seguida por cada uno de los prefragmentos que constituyen una muestra estadística en el modelo híbrido. La secuencia se detiene cuando el núcleo emite una partícula o alcanza el estado de núcleo compuesto  $\bar{n}$ .*

Esta aproximación es válida para energías de excitación bajas ya que la probabilidad de emisión de más de un nucleón es pequeña. Sin embargo, a medida que se incrementa la energía de excitación esta probabilidad aumenta significativamente llegando un punto en el que la negación de la emisión múltiple de partículas se vuelve muy imprecisa. Esto se puede apreciar en la figura 4.5 en la que se representa el número de partículas excitadas con una energía superior a la barrera de separación en función de la energía de excitación para diferentes configuraciones partícula-hueco.

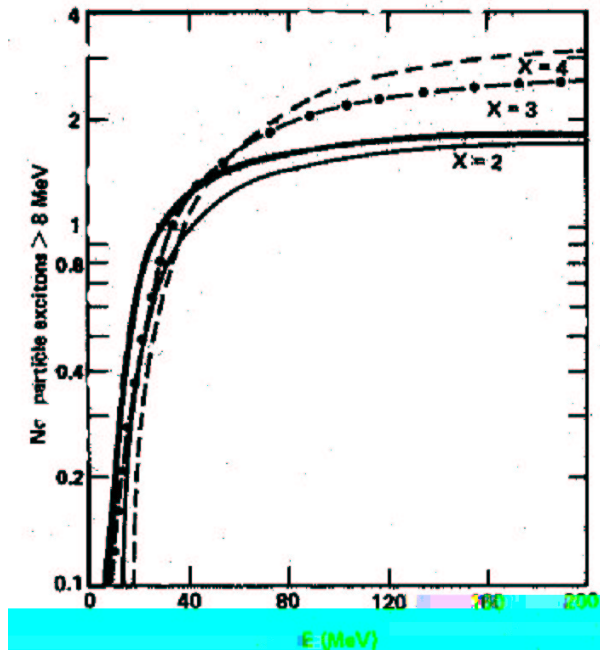


Figura 4.5: Número de partículas excitadas con una energía 8 MeV superior a la de la energía de Fermi en función de la energía de excitación del prefragmento para valores diferentes del número de excitones. La línea gruesa muestra la configuración 2p1h, la línea a trazos y puntos se corresponde con la configuración 3p2h, la línea a trazos muestra los resultados correspondientes a la configuración 4p3h y finalmente la línea fina muestra la configuración 2p2h [33].

La emisión múltiple de partículas se puede incorporar de un modo aproximado en la formulación del modelo *híbrido* [33]. Sin embargo, la manera más sencilla de incluir este proceso consiste en adaptar el modelo a un código Monte Carlo. De esta manera se puede seguir de un modo natural la secuencia de cada uno de los prefragmentos durante el proceso de preequilibrio. Esto permitirá además, obtener una serie de observables adicionales como las funciones de excitación o las distribuciones de masa y de energía de excitación del prefragmento una vez termalizado. De hecho, estos dos últimos parámetros tienen una importancia trascendental a la hora de estudiar los procesos de desexcitación del núcleo compuesto, en los que además de la

evaporación de partículas también se debe considerar la fisión [36].

## 4.4 Código Monte Carlo

A fin de estudiar los procesos de preequilibrio, se han elaborado numerosos códigos Monte Carlo basados en el modelo *híbrido* [37, 38, 39]. Sin embargo, en este trabajo se ha preferido desarrollar uno nuevo con el propósito de adquirir un entendimiento profundo de todo el proceso. Además, esto permite tener el control de todos los parámetros utilizados en la simulación. En esta sección se presentará el código desarrollado. Primeramente se describirá la secuencia lógica seguida por el programa. En segundo lugar se explicará en detalle cada uno de los parámetros utilizados en la simulación. Finalmente, se compararán los resultados obtenidos con medidas experimentales.

### 4.4.1 estructura lógica del programa

El programa realiza la simulación de cada uno de los prefragmentos que componen una muestra estadística durante el proceso de preequilibrio. La secuencia lógica se compone de los siguientes pasos:

1. Introducción de los parámetros de entrada que definen la reacción de espalación: isospín del proyectil, energía incidente, masa y carga del núcleo blanco.
2. Cálculo de variables que caracterizan al núcleo a partir de los parámetros iniciales: energía de excitación, energía de Fermi, profundidad del pozo de potencial, etc...
3. Determinación del número inicial de partículas excitadas y su isospín. Esto se efectúa mediante una tirada aleatoria en la que se considera la sección eficaz de interacción protón-protón, neutrón-protón y neutrón-neutrón, así como el número de protones y neutrones en el mar de Fermi.
4. Una vez definido el estado excitado del prefragmento  $(n, E)$  se procede a estudiar la emisión de nucleones excitados desde este estado. Esto se realiza para cada partícula mediante el siguiente algoritmo:
  - (a) Selección aleatoria del isospín  $x$  de la partícula que se va a estudiar.



- (b) Cálculo de su energía de ligadura  $B_x$ .
- (c) Cálculo de la energía de excitación de la partícula  $\epsilon$  a partir del parámetro  $\wp(\epsilon)$ .
- (d) Tirada aleatoria para decidir si la partícula es emitida al continuo o no. Para ello se considera los modos de decaimiento al continuo  $\lambda_c(\epsilon)$  e interno  $\lambda_+(\epsilon)$  para cada partícula excitada. Una vez llegado a este punto el algoritmo se bifurca:
  - i. Si la partícula es emitida, se procede a la modificación de los parámetros que definen la reacción: energía de emisión de la partícula  $\epsilon_c$ , energía total de excitación  $E$ , número de excitones  $n$  y número de nucleones excitados  ${}_nX_x$ . Esto se realiza según las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\epsilon_c &= \epsilon - B_x \\ E &= E - \epsilon \\ n &= n - 1 \\ {}_nX_x &= {}_nX_x - 1\end{aligned}$$

- ii. Si la partícula no es emitida se pasa automáticamente al siguiente punto.
  - (e) Al finalizar este bucle se vuelve al punto (a) y se repite el algoritmo para cada una de las restantes partículas excitadas.
5. Una vez calculada la emisión de todas las partículas excitadas en un estado  $n$  se pasa al siguiente estado. Para ello se asume que se produce un decaimiento interno de forma que el número de excitones se incrementa en dos unidades. En cuanto al número de partículas excitadas, se deberán incrementar en una unidad seleccionando aleatoriamente el isospín.
  6. Se vuelve al punto 4. y se repite de nuevo todo el proceso con los nuevos valores de  $n$ ,  ${}_nX_x$  y  $E$ . El programa se detiene en el momento en el que el número de nucleones alcanza el valor correspondiente al estado de núcleo compuesto  $\bar{n}$ , donde este valor se determina según la expresión 4.15. A partir de este punto se determina la desexcitación del núcleo con un modelo estadístico [36].

La figura 4.6 muestra de forma esquemática una de las posibles secuencias de estados que puede seguir un prefragmento durante la termalización.

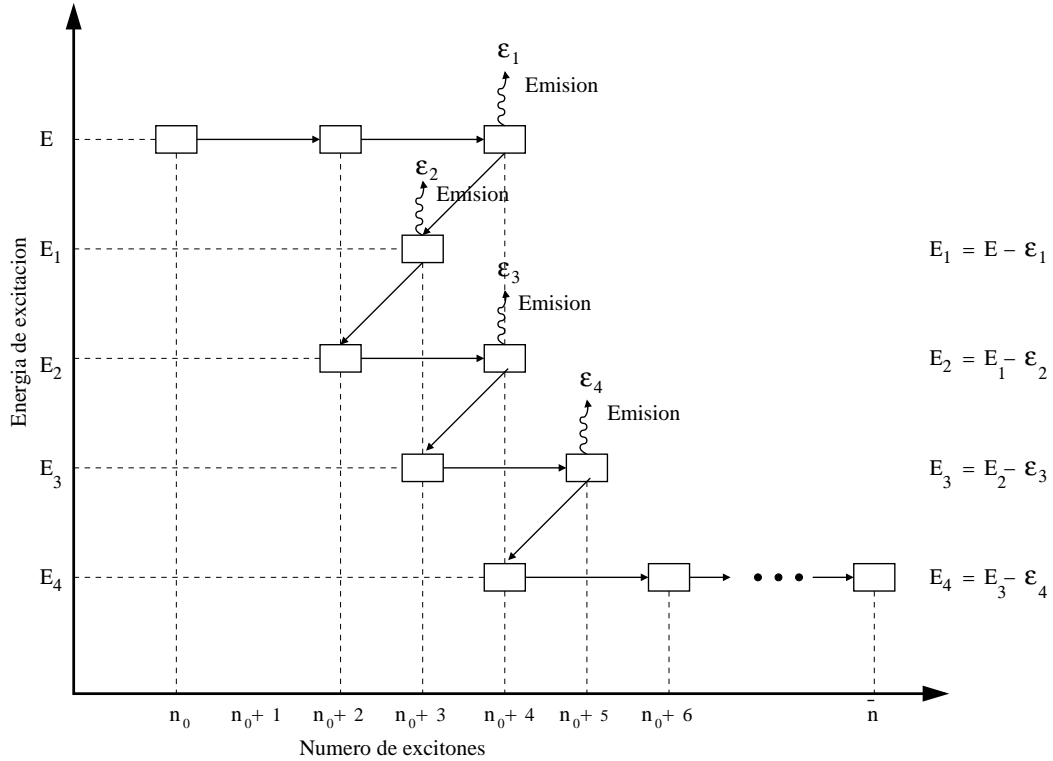


Figura 4.6: *Secuencia de preequilibrio seguida por un prefragmento, durante la cual se emiten cuatro nucleones. La secuencia se detiene cuando el núcleo alcanza el estado de núcleo compuesto  $\bar{n}$ .*

#### 4.4.2 Parámetros utilizados en la simulación

- Sección eficaz total de reacción  $\sigma_R$

Este parámetro es necesario a la hora de normalizar la sección eficaz diferencial de emisión de partículas  $\sigma_c(\epsilon)$  que define los espectros energéticos. En un principio, existen numerosos programas para calcular esta variable. En el presente trabajo se ha optado por el programa KAROL [40, 41], por ser uno de los más utilizados en trabajos anteriores.

- Sección eficaz inversa  $\sigma_{inv}$

Esta cantidad es necesaria para el cálculo del modo de decaimiento al continuo según se ha visto en la expresión 4.10. En el presente código se ha

optado por utilizar una subrutina de cálculo en la que se considera el efecto túnel a través de barreras Coulombiana [42]

- Densidad nuclear  $\bar{\rho}$  media

Esta cantidad se calcula promediando la densidad de Fermi  $\rho$  a todo el volumen del núcleo según la expresión:

$$\bar{\rho} = \int_0^{R_s} dR \frac{\rho(R)}{R_s} \quad (4.18)$$

donde  $R_s = C + 5a$  [43], con  $C = 1.07A^{1/3} fm$  y  $a = 0.55 fm$ . La densidad  $\rho$  viene dada por la expresión:

$$\rho = \frac{\rho_s}{\exp(R - C)/a + 1} \quad (4.19)$$

donde  $R$  es la distancia radial del núcleo medida desde su centro y  $\rho_s$  es el valor de saturación igual a  $0.17 fm^{-3}$ .

- Energía media de Fermi  $\bar{E}_F$

Se calcula mediante la expresión:

$$\bar{E}_F = E_F \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_s} \right)^{2/3} \quad (4.20)$$

donde  $E_F = 40 MeV$ .

- Densidad de estados de partícula independiente  $g$

Normalmente esta densidad depende del isospín del nucleón. Su valor viene dado por las siguientes expresiones:

$$g_n = \frac{N}{20} \left( \frac{\epsilon_F + B_n + \epsilon}{\epsilon_F} \right)^{1/2} \quad (4.21)$$

$$g_p = \frac{Z}{20} \left( \frac{\epsilon_F + B_p + \epsilon}{\epsilon_F} \right)^{1/2} \quad (4.22)$$

donde  $N$  y  $Z$  son respectivamente el número de neutrones y de protones presentes en el núcleo. Sin embargo, en la mayoría de los casos se recurre a las formas más simplificadas  $g_n = N/14$  y  $g_p = Z/14$  con la que se obtienen prácticamente los mismos resultados [33].

- Decaimiento al continuo  $\lambda_c$  e interno  $\lambda_+$ .

El decaimiento al continuo viene dado por la expresión propuesta por Blann en su modelo *híbrido* (ecuación 4.10). En cuanto al decaimiento interno, éste se calcula a partir del recorrido libre medio  $\bar{\lambda}$  de la partícula y su velocidad  $v$  en el interior del núcleo:

$$\lambda_+ = \frac{v}{\bar{\lambda}} \quad (4.23)$$

A su vez, el recorrido libre depende de la densidad nuclear y la sección eficaz media de interacción nucleón-nucleón. Esta sección eficaz para una partícula de isospín  $x$  viene dada por:

$$\bar{\sigma}_x(\epsilon) = \frac{Z\bar{\sigma}_{xp}(\epsilon) + N\bar{\sigma}_{xn}(\epsilon)}{A} \quad (4.24)$$

donde  $\bar{\sigma}_{xp}(\epsilon)$  y  $\bar{\sigma}_{xn}(\epsilon)$  son las secciones eficaces de interacción de la partícula con isospín  $x$  con protones y neutrones respectivamente [29]. Estas secciones eficaces se calculan a partir de las secciones eficaces libres corregidas por el principio de Pauli <sup>2</sup>.

- Distribución de energía de los nucleones excitados.

Como ya se ha mencionado, la distribución de energía de los nucleones excitados se determina a partir de las densidades de niveles para los estados de partícula-hueco por los que pasa el prefragmento. Esta distribución viene dada por la expresión 4.8. Existen varios métodos para distribuir aleatoriamente la energía de cada uno de los nucleones a partir de la ecuación 4.8. En el presente caso, la simpleza de dicha expresión permite determinar la energía de cada partícula de un modo muy sencillo según la fórmula:

$$\epsilon = E \left[ 1 - [1 - n(\epsilon)]^{1/n-1} \right] \quad (4.25)$$

donde  $n(\epsilon)$  es un número aleatorio entre 0 y 1.

## 4.5 Resultados preliminares

Con la propuesta de modelo discutida hasta ahora se realizó el estudio de los espectros energéticos de protones y neutrones para diferentes reacciones. La

---

<sup>2</sup>Para un cálculo detallado de las mismas consúltese el apéndice B

## 4.5. RESULTADOS PRELIMINARES

figura 4.7 muestra un estudio comparativo de los espectros de emisión para la reacción  $p(90\text{MeV}) + {}^{90}\text{Zr}$  cuando la emisión de partículas está limitada a una y cuando se incluye la emisión múltiple de partículas. Como se puede apreciar, la emisión múltiple de partículas es especialmente importante a bajas energías.

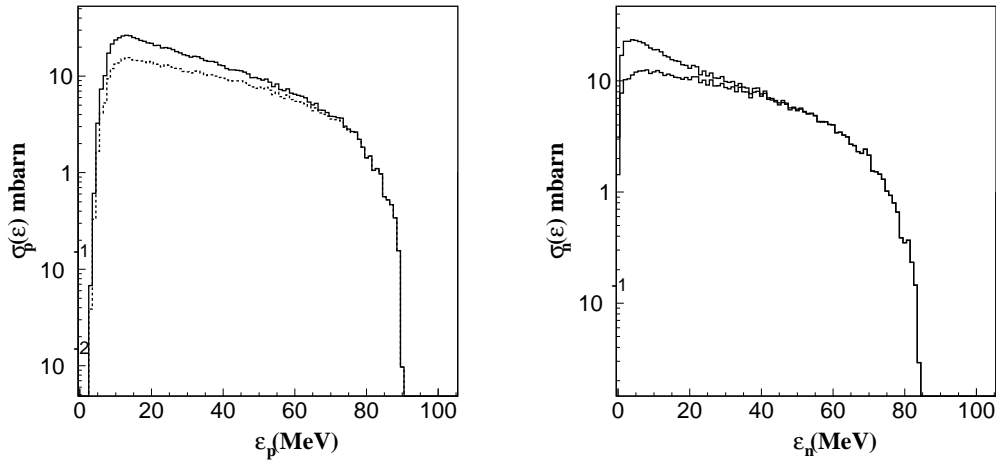


Figura 4.7: *Espectro energético de emisión de protones (izquierda) y neutrones (derecha) para la reacción  $p(90\text{MeV}) + {}^{90}\text{Zr}$ . Línea continua: cálculo incluyendo emisión múltiple de partículas. Línea discontinua: cálculo limitando a uno el número de partículas emitidas.*

En la figura 4.

CAPÍTULO 4. CÓDIGO MONTE CARLO BASADO EN MODELOS DE PREEQUILIBRIO

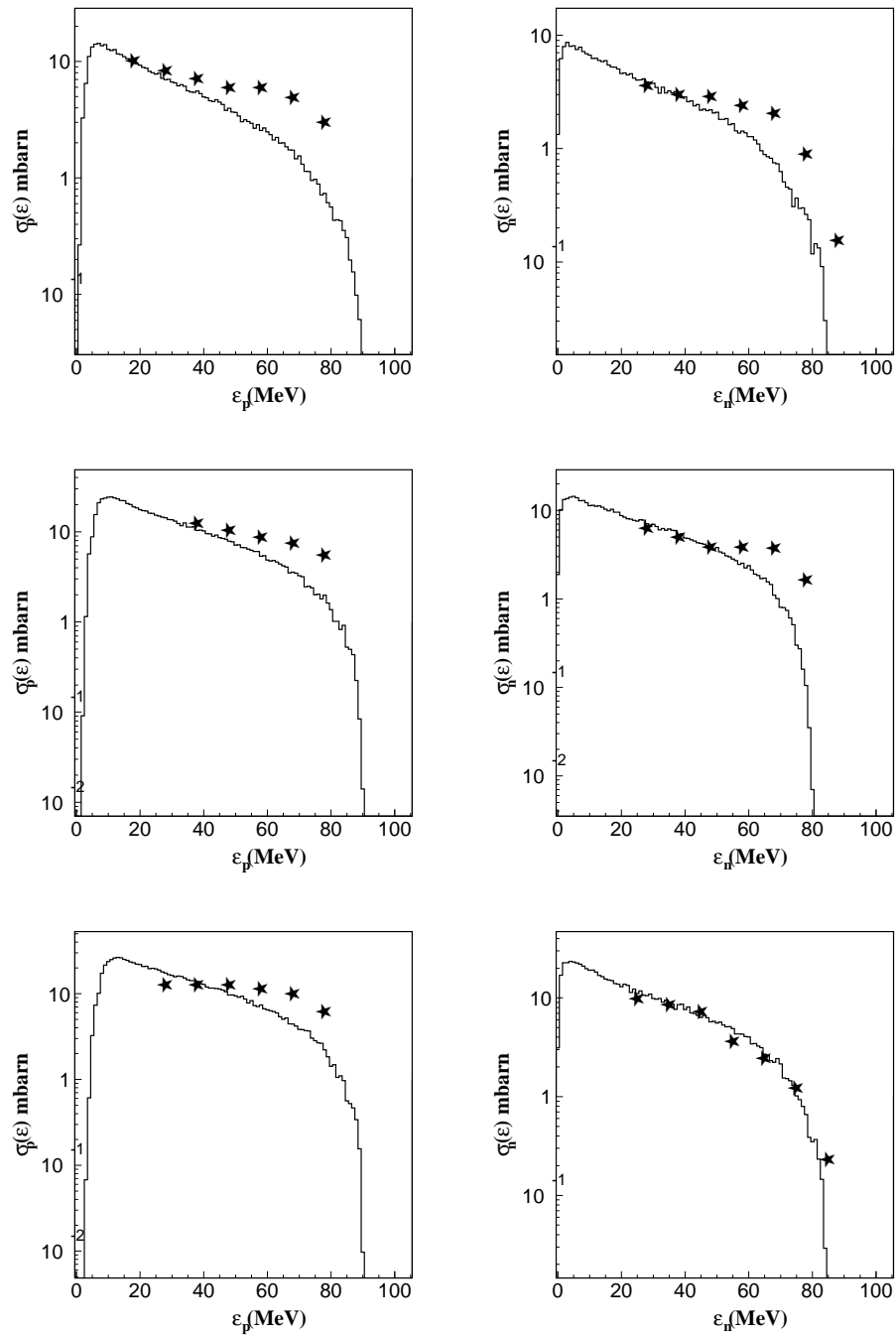


Figura 4.8: *Espectro energético de emisión de protones (izquierda) y neutrones (derecha) para la reacción . Resultados experimentales corresponden a las reacciones  $p(90\text{MeV}) + ^{27}\text{Al}$  (arriba),  $p(90\text{MeV}) + ^{58}\text{Ni}$  (centro) y  $^{90}\text{Zr}$  (abajo) [35, 34].*

## 4.6 Refinamientos del programa

A fin de solventar las deficiencias del programa para reproducir los espectros de emisión en la parte más energética, se incluyó de un modo aproximado la geometría del núcleo así como algún refinamiento de los parámetros utilizados.

- Geometría del núcleo.

En el modelo *GDH*, Blann propuso una manera aproximada de considerar la geometría del núcleo durante la fase de preequilibrio. Esta misma aproximación fue la que se introdujo en este programa.

Al principio de la simulación, se determina mediante una tirada aleatoria el parámetro de impacto  $b$  del proyectil incidente. En la aproximación semiclásica, el parámetro de impacto se relaciona con el momento angular orbital  $l$  del proyectil incidente a través de la expresión  $l = bk$ , donde  $k$  es el momento de proyectil. A partir de este momento angular orbital se puede calcular la densidad de materia nuclear promediada sobre la trayectoria del proyectil correspondiente a la onda parcial  $l$ :

$$\bar{\rho}_l = \int_{R_l}^{R_s} dR \frac{\rho(R)}{R_s - R_l} \quad (4.26)$$

donde  $\rho(R)$  es la densidad de Fermi dada por la ecuación 4.19 y  $R_l = b + \pi\lambda$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda de De Broglie. Con esta nueva densidad corregida se pueden tener en cuenta los dos efectos explicados en la sección 5.2.

Por un lado, el recorrido libre medio de los nucleones excitados en el interior del prefragmento se modifica automáticamente en el momento que se corrige la densidad nuclear correspondiente a la onda parcial  $l$ . Debido a que este recorrido libre medio local es comparable a las dimensiones del núcleo es improbable que un nucleón incidiendo en el blanco con un parámetro de impacto grande permanezca confinado, después de una interacción, en la superficie nuclear. Como consecuencia de esto, la corrección geométrica es utilizada únicamente para describir la primera interacción del proyectil con el blanco.

Por otro lado, la energía de Fermi se calcula con la siguiente expresión:

$$E_F(l) = E_F \left( \frac{\bar{\rho}_l}{\rho_s} \right)^{2/3} \quad (4.27)$$

## CAPÍTULO 4. CÓDIGO MONTE CARLO BASADO EN MODELOS DE PREEQUILIBRIO

---

La reducción de la energía de Fermi implica una limitación en la energía con la que los huecos pueden contribuir a la energía de excitación total del prefragmento. Esta limitación se debe tener en cuenta a la hora de calcular la probabilidad de encontrar una de las partículas excitadas con energía  $\epsilon$ . La nueva probabilidad  $\wp(\epsilon)$  se calculará a partir de los factores  $N_n(\epsilon, E_r)$  y  $N_n(E)$  introducidos en la expresión 4.4, teniendo en cuenta la reducción de la energía de Fermi. Considerando esta limitación únicamente para el primer estado  $n_0$  se obtiene [26]:

$$N_{2p-1h}(\epsilon, E_r) = \frac{1}{2}gE_F(l) \quad (4.28)$$

$$N_{2p-1h}(E) = \frac{1}{4}g^2E_F(l)[2E - E_F(l)] \quad (4.29)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 4.4 se obtiene:

$$\wp(\epsilon) = \frac{1}{E - E_F(l)/2} \quad (4.30)$$

con lo cual la distribución de energía de excitación para los núcleos excitados en la configuración inicial será:

$$\epsilon = \left(E - \frac{E_F(l)}{2}\right)n(\epsilon) + \frac{E_F(l)}{2} \quad (4.31)$$

donde  $n(\epsilon)$  es un número aleatorio entre 0 y 1. Para el resto de los estados (interacciones sucesivas) la distribución de energía se determina con la ecuación 4.25.

- Distribución de energía de las partículas excitadas corregida por el principio de Pauli.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la distribución de energía de las partículas excitadas se puede calcular a partir de las densidades de niveles de partícula-hueco dados por Ericson [28]. Sin embargo, estas densidades de niveles pueden ser corregidas incluyendo el principio de Pauli <sup>3</sup>, resultando:

$$\rho_{p,h}(E) = \frac{(gE - A)^{n-1}}{p!h!(n-1)!} \quad (4.32)$$

---

<sup>3</sup>Ver apéndice A



y

$$\rho_{p-1,h}(E - \epsilon, \epsilon) = \frac{(gE - g\epsilon - A)^{n-2}}{(p-1)!h!(n-2)!} \quad (4.33)$$

donde  $A$  es el parámetro que tiene en cuenta el principio de Pauli y que viene dado por la expresión A.22. Con estas densidades, la probabilidad de encontrar una partícula excitada con energía  $\epsilon$  será:

$$\wp(\epsilon) = \frac{n-1}{gE-A} \left(1 - \frac{g\epsilon}{gE-A}\right)^{n-2} \quad (4.34)$$

A partir de esta expresión, la energía de cada nucleón excitado se determina aleatoriamente mediante la ecuación:

$$\epsilon = \left(E - \epsilon - \frac{A}{g}\right) \left[1 - (1 - n(\epsilon))^{1/n-1}\right] \quad (4.35)$$

donde  $n(\epsilon)$  es un número aleatorio entre 0 y 1.

## 4.7 Resultados

Con estas modificaciones introducidas en la versión final del programa se estudiaron los espectros energéticos de varias reacciones nucleares de espalación. En la figura 4.9 se comparan los resultados obtenidos con las dos versiones del programa. Como se puede apreciar, las correcciones descritas en la sección anterior mejoran notablemente el acuerdo de los resultados con las medidas experimentales, especialmente en la zona de altas energías. En la figura 4.10 se muestra la distribución de energía de excitación y de masa para los prefragmentos obtenidos en la reacción  $p(90MeV) + {}^{90}Zr$ .

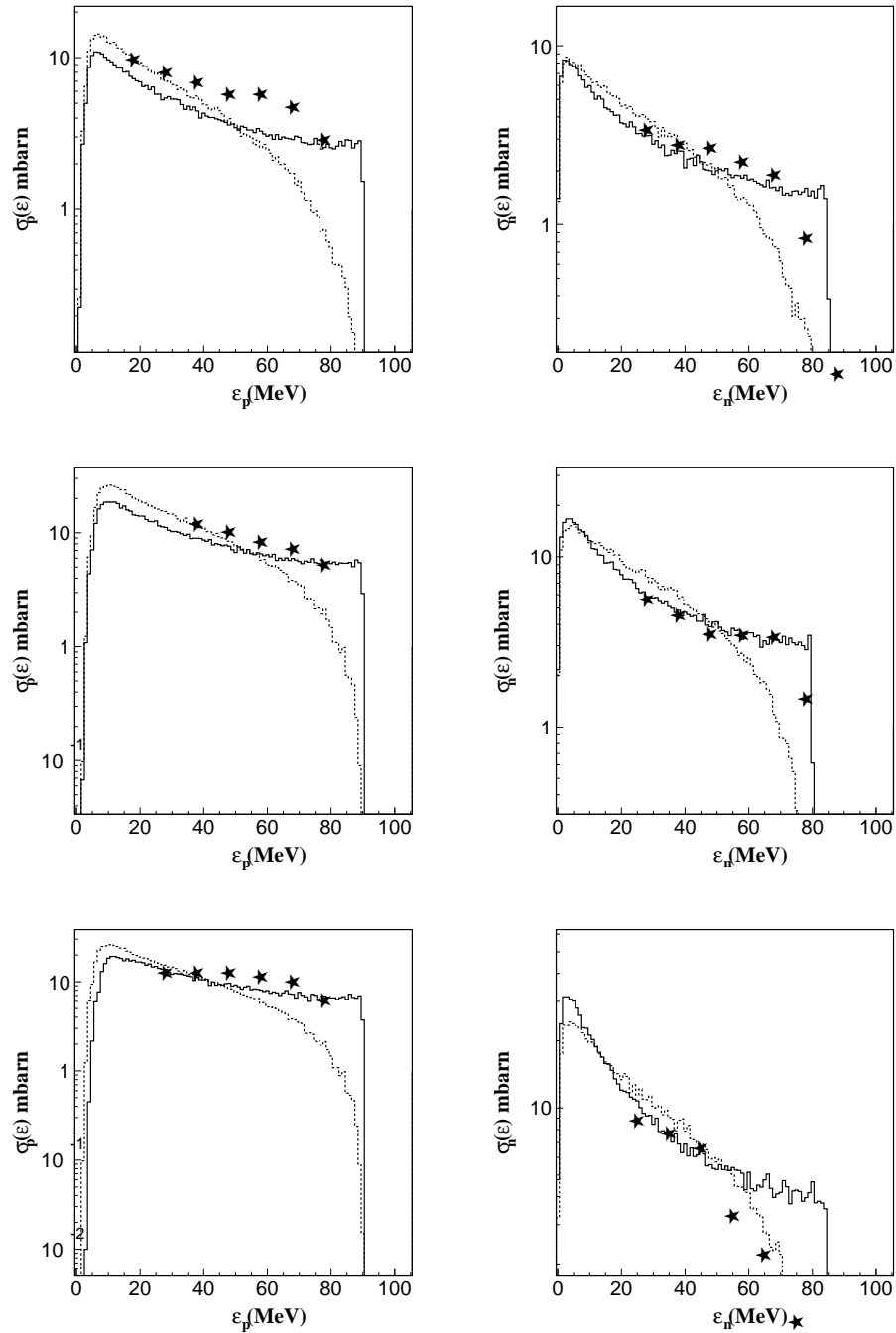


Figura 4.9: Espectro energético de emisión de protones (izquierda) y neutrones (derecha) para la reacción  $p(90\text{ MeV}) + {}^{27}\text{Al}$  (arriba),  $p(90\text{ MeV}) + {}^{58}\text{Ni}$  (centro) y  $p(90\text{ MeV}) + {}^{90}\text{Zr}$  (abajo). Línea continua: cálculos realizados incluyendo corrección geométrica y principio de Pauli. Línea discontinuo: cálculos realizados con la primera versión del programa. Resultados experimentales corresponden a [35, 34].

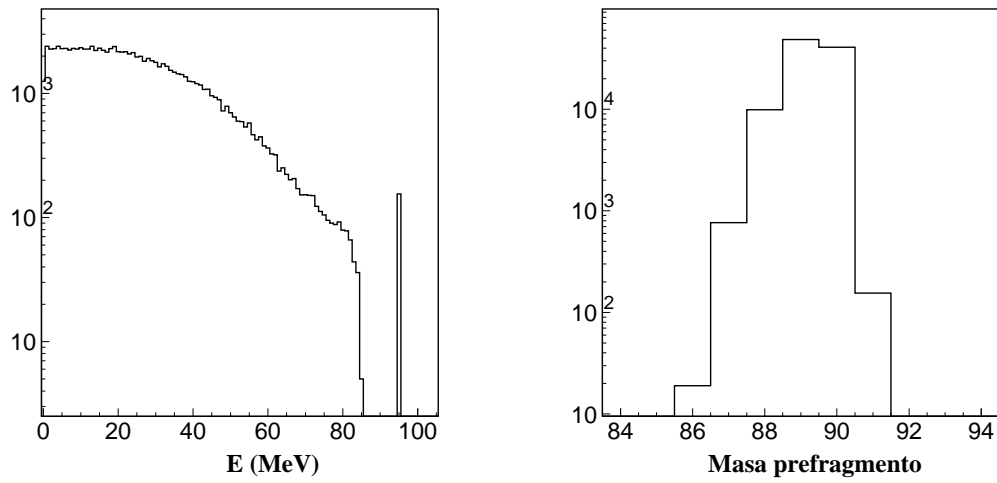


Figura 4.10: *Distribución de energía de excitación (izquierda) y masas (derecha) para los prefragmentos producidos en la reacción  $p(90\text{MeV}) + {}^{90}\text{Zr}$ .*



# Apéndice A

## Densidad de estados para un número fijo de partículas y huecos

Según la hipótesis de Griffin, durante la termalización del prefragmento todas las configuraciones entre  $p$  partículas y  $h$  huecos con energía total de excitación  $E$  son equiprobables. Teniendo esto en cuenta, la probabilidad de encontrar una partícula excitada con energía  $\epsilon$  dentro del núcleo en el estado  $(n, E)$  (ecuación 4.4) puede ser calculada a partir de las densidades de estados  $\rho_{p,h}(E)$ . Estas densidades de estados no se corresponden con el número total de particiones de la energía de excitación  $E$  entre todas las partículas y huecos, como sucede con los estados de núcleo compuesto. Más bien, durante las interacciones nucleón-nucleón, los estados excitados están caracterizados por un número exacto de partículas y huecos.

### A.1 El modelo de espacio equidistante: cálculo exacto

En la aproximación de estados de partícula independiente equidistantes, el cálculo de la densidad de estados con un número exacto de partículas y huecos está conectado estrechamente con el problema clásico de evaluar el número de maneras en que un entero  $M$  puede ser dividido en no más de  $N$  partes enteras [44]. Este problema fue resuelto por Euler en 1753 [45] quien demostró que este número de particiones  $P_N(M)$  se puede obtener a partir

APÉNDICE A. DENSIDAD DE ESTADOS PARA UN NÚMERO FIJO DE PARTÍCULAS Y HUECOS

de la fórmula de recurrencia:

$$P_N(M) = P_{N-1}(M) + P_N(M - N) \quad (\text{A.1})$$

El valor de  $P_N(M)$  puede ser obtenido a partir de A.1 utilizando las condiciones:

$$P_N(0) = 1 \quad (\text{A.2})$$

y

$$P_0(M) = \delta_{0M} \quad (\text{A.3})$$

Euler elaboró una tabla de valores de  $P_N(M)$  como la que aparece en la figura A.1.

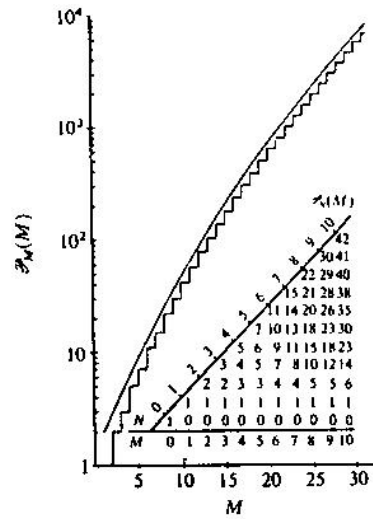


Figura A.1: Comparación del número de particiones  $P_M(M)$  (curva escalonada) con la aproximación dada por la ecuación A.4. En la figura también se muestra una parte de la tabla del número de particiones elaborada por Euler [44].

La función de partición  $P_N(M)$  se muestra en la figura junto con la solución aproximada propuesta por Ericson [28]:

$$P_M(M) = \frac{\exp\left[\pi\left(\frac{2}{3}M\right)^{1/2}\right]}{\sqrt{48M}} \quad (\text{A.4})$$

## A.1. EL MODELO DE ESPACIO EQUIDISTANTE: CÁLCULO EXACTO

De hecho, existe una estrecha relación entre la densidad de estados  $\rho(N, E)$  del modelo de espacio equidistante y  $P_N(M)$ :

$$\rho(N, E) = g_0 P_M(M) \quad (\text{A.5})$$

siendo  $M$  una medida de la energía de excitación  $E$  en unidades de distancia entre niveles del espacio equidistante:

$$M = g_0 E \quad (\text{A.6})$$

En la figura A.2 se compara la solución exacta y aproximada de  $\rho(N, E)$ .

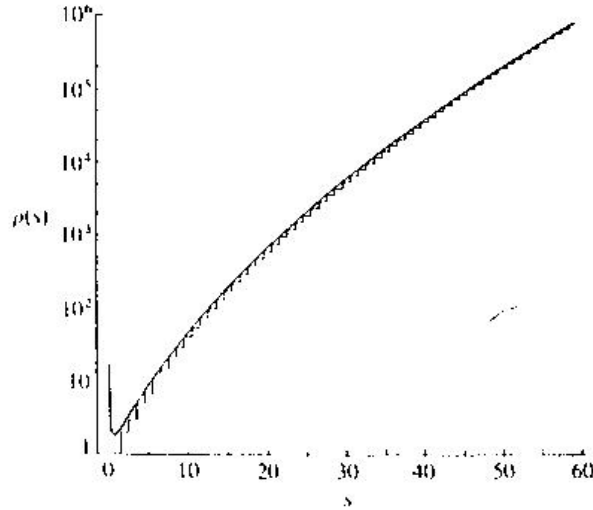


Figura A.2: Comparación entre la solución exacta de la densidad de estados de partícula-hueco con la solución aproximada descrita por la ecuación A.4 [28].

Para obtener la densidad de estados de  $p$  partículas y  $h$  huecos se deben considerar que:

- La energía total de excitación se debe dividir entre las partículas y huecos de modo que:

$$E = E_p + E_h \quad (\text{A.7})$$

o lo que es lo mismo, utilizando la ecuación A.6:

$$M = M_p + M_h \quad (\text{A.8})$$

- El número de particiones  $P_N(M)$  cuenta sólo una vez todas las particiones obtenidas permutando el contenido de cada parte, de modo que se satisface la condición de que las distintas partículas y huecos son indistinguibles. Sin embargo, el principio de Pauli no es tenido en cuenta. Para corregir esto se debe sustraer de la energía total de excitación la energía mínima necesaria para excitar  $p$  partículas y  $h$  huecos satisfaciendo el principio de Pauli. Esta energía se obtiene contando la energía de excitación de las partículas y huecos desde el último nivel ocupado del núcleo en su estado fundamental:

$$E_{pp} = \frac{1}{g_0} \left( \sum_{i=1}^p i + \sum_{i=1}^{h-1} i \right) = \frac{1}{2g_0} [p(p+1) + h(h-1)] \quad (\text{A.9})$$

Utilizando la expresión A.5 se obtiene:

$$\rho_{p,h}(E) = g_0 \sum_{m=0}^{M'} P_p(m) P_h(M' - m) \quad (\text{A.10})$$

donde  $M' = g_0 E' = g_0(E - E_{pp})$

## A.2 El modelo de espacio equidistante: solución aproximada

A pesar de que la solución exacta de  $\rho_{p,h}(E)$  puede ser evaluada fácilmente con un ordenador, en simulaciones Monte Carlo es más útil emplear las soluciones aproximadas. La más simple de todas ellas es la propuesta por Ericson [28]:

$$\rho_{p,h}(E) = g_0 \frac{(g_0 E)^{p+h-1}}{p!h!(p+h-1)!} \quad (\text{A.11})$$

que se obtiene por medio de las fórmulas de recurrencia:

$$\rho_{p,0}(E_p) = \frac{1}{p} \int_0^{E_p} \rho_{1,0}(u) \rho_{p-1,0}(E_p - u) du \quad (\text{A.12})$$

$$\rho_{0,h}(E_h) = \frac{1}{h} \int_0^{E_h} \rho_{0,1}(u) \rho_{0,h-1}(E_h - u) du \quad (\text{A.13})$$



A.2. EL MODELO DE ESPACIO EQUIDISTANTE: SOLUCIÓN APROXIMADA

$$\rho_{p,h}(E_p) = \int_0^E \rho_{p,0}(u) \rho_{0,h}(E - E_p) du \quad (\text{A.14})$$

donde  $E = E_p + E_h$  y  $\rho_{1,0}(u) = \rho_{0,1}(u) = g_0$ .

Como consecuencia de la violación del principio de Pauli en las ecuaciones A.12, A.13 y A.14, la fórmula de Ericson sobreestima considerablemente la densidad de estados excepto para un número pequeño de partículas y huecos (ver figura A.3).

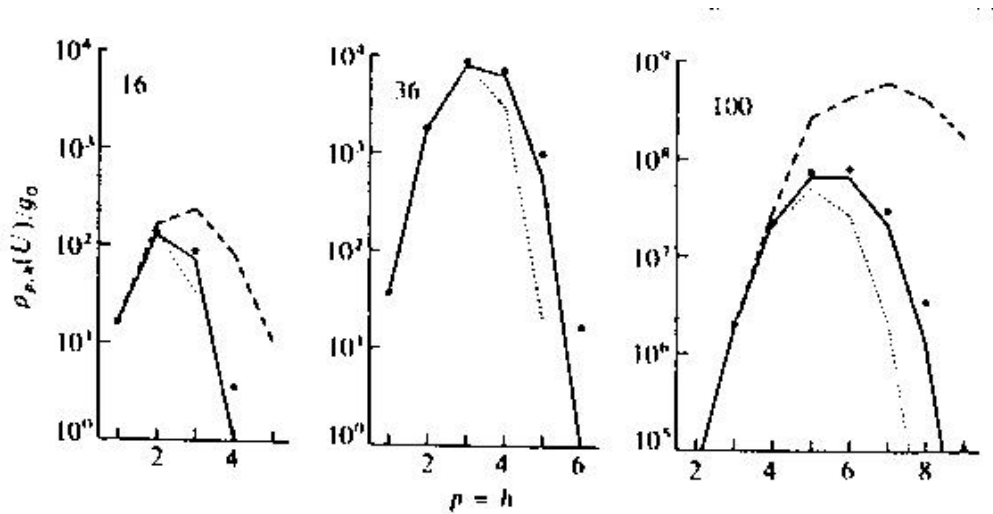


Figura A.3: Comparación entre la solución exacta de la densidad de estados A.10 (línea continua) con la solución de Ericson (línea a trazos), con la densidad de estados de Ericson corregida por el principio de Pauli (línea punteada) y con la solución propuesta por Williams (puntos).

Una manera aproximada de corregir este efecto consiste en utilizar relaciones de recurrencia obtenidas a partir de la ecuación A.1 hasta  $N \simeq M^{1/3}$  [44]:

$$P_N(M) \simeq \frac{M^{N-1}}{N!(N-1)!} \left( 1 + \frac{(N-1)N(N+1)}{4M} \right) \quad (\text{A.15})$$

Insertando esta expresión en la ecuación A.11, sustituyendo  $g_0 E - E_{pp}$  por

APÉNDICE A. DENSIDAD DE ESTADOS PARA UN NÚMERO FIJO DE PARTÍCULAS Y HUECOS

---

$M'$  y cambiando sumatorios por integrales se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_{p,h}(E) &= \frac{(g_0 E - E_{pp})^{p+h-1}}{p!h!(p+h-1)!} \times \\ &1 + \frac{p+h-1}{2(g_0 E - E_{pp})} \left[ \left( \frac{p+1}{2} + \frac{h+1}{2} \right) \right] + \\ &\frac{1}{2(g_0 E - E_{pp})^2} \left( \frac{p+1}{2} \right) \left( \frac{h+1}{2} \right) \left( \frac{p+h-1}{2} \right) \end{aligned}$$

En la figura A.3 se comparan los valores calculados con esta fórmula con los obtenidos con la expresión exacta.

La expresión más utilizada de  $\rho_{p,h}(E)$  de las propuestas hasta el momento es la obtenida por Williams [46]. La deducción de esta expresión se basa en el método de Darwin Fowler de mecánica estadística. Asumiendo que no hay interacción entre partículas y huecos, el prefragmento se puede representar por un gas de dos tipos independientes de fermiones, cuyas funciones de partición vienen dadas por:

$$Z = Z_p Z_h \tag{A.16}$$

Cada una de estas funciones de partición se expresan de forma generalizada a través de la expansión binomial, donde las densidades de niveles se corresponden con los coeficientes de dicha expansión:

$$Z_p(x, y) = \prod_{p, E_p=0}^{\infty} \rho_{p,0}(E_p) x^p y^{E_p} \tag{A.17}$$

$$Z_h(x, y) = \prod_{h, E_h=0}^{\infty} \rho_{0,h}(E_h) x^h y^{E_h} \tag{A.18}$$

Aplicando el teorema de la integral de Cauchy se obtiene:

$$\rho_{p,0}(E_p) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint Z_p \frac{dx dy}{x^{p+1} y^{E_p+1}} \tag{A.19}$$

y

$$\rho_{0,h}(E_h) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint Z_h \frac{dx dy}{x^{h+1} y^{E_h+1}} \tag{A.20}$$

Finalmente  $\rho_{p,h}(E)$  se determina a partir de la expresión A.14. El cálculo detallado de la densidad de estados fue realizado por Williams [?], Běták

## A.2. EL MODELO DE ESPACIO EQUIDISTANTE: SOLUCIÓN APROXIMADA

---

y Dobeš [47] y Obložinský [48]. El principio de Pauli se tiene en cuenta sustrayendo  $E_{pp}$  de la energía total de excitación. La final expresión es:

$$\rho_{p,h}(E) = g_0 \frac{(g_0 E - A_{ph})^{p+h-1}}{p!h!(p+h-1)!} \quad (\text{A.21})$$

donde

$$A_{ph} = \frac{1}{4}(p^2 + h^2) + \frac{1}{4}(p - h) - \frac{1}{2}h \quad (\text{A.22})$$

En la figura A.3 se comparan los valores obtenidos con la ecuación A.21 con la solución exacta. Como se puede ver, la propuesta de Williams representa una aproximación excelente.



# Apéndice B

## Evaluación de la sección eficaz media $\bar{\sigma}$ nucleón-nucleón

Los cálculos que se muestran a continuación han sido realizados utilizando varias aproximaciones propuestas por numerosos autores [49, 50, 51, 52, 53, 54, 29, 55, 56]. En estos cálculos se considera al núcleo como un gas de Fermi donde cada partícula se mueve dentro de un potencial constante. Además, se deben distinguir dos sistemas de referencia:

- Sistema de referencia del núcleo, el cual coincide con el sistema laboratorio en la aproximación de materia nuclear infinita. En este sistema, el momento de las partículas que colisionan (cuya energía se evalúa desde el fondo del pozo de potencial) son  $P_1$  y  $P_2$  antes de la interacción y  $P'_1$  y  $P'_2$  después. El momento del nucleón golpeado es  $P'_f$ . El momento total de los dos nucleones antes y después de la interacción es, respectivamente  $P$  y  $P' = P$
- El sistema de centro de masas de los dos nucleones que colisionan. En este sistema, el momento relativo de los dos nucleones antes y después de la interacción es, respectivamente  $2K$  y  $2K'$ . Además, como la interacción es elástica se tiene  $|K| = |K'|$ .

También se asume, por simplicidad que la dependencia de la sección eficaz nucleón-nucleón en energía y momento angular se corresponde con la de la sección eficaz libre. Para evaluar esta sección eficaz promedio  $\bar{\sigma}$  se debe promediar la sección eficaz  $\sigma(K, K')$  sobre todos los posibles momen-

APÉNDICE B. EVALUACIÓN DE LA SECCIÓN EFICAZ MEDIA  $\bar{\sigma}$   
 NUCLEÓN-NUCLEÓN

---

tos y direcciones de movimiento de la partícula golpeada, los cuales viene caracterizados por la distribución de momento  $n(P_2)$ .

La sección eficaz promedio nucleón-nucleón es igual a:

$$\bar{\sigma} = \frac{\langle v_{rel}\sigma \rangle}{v_{inc}} \quad (\text{B.1})$$

donde  $v_{rel}$  y  $v_{inc}$  son las velocidades relativas de las partículas que colisionan y la velocidad de la partícula incidente. Por tanto, la expresión anterior resulta:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{P_1} \int dn(P_2) \int \int dK' 2K \sigma(K, K') [1-f(P'_1)][1-f(P'_2)] \delta^3(P-P') \quad (\text{B.2})$$

donde la cantidad

$$dK = \frac{\delta(K-K')}{K^2} dK' \quad (\text{B.3})$$

es el ángulo sólido dentro del cual los nucleones se mueven después de la interacción en su centro de masas (a partir de ahora  $dK = d\Omega'$ ).

Los operadores  $[1 - f(P)]$ , donde  $f(P)$  es la probabilidad de ocupación de un estado de nucleón con momento  $P$ , garantiza que el principio de Pauli es tenido en cuenta, prohibiendo que los nucleones golpeados ocupen estados que ya estén llenos.

La integración de la ecuación B.2 es particularmente simple en el caso de un gas de Fermi a temperatura cero. En este caso, los momentos de los nucleones del blanco están confinados a una esfera de momento  $P_F$ . La distribución de momento de las partículas golpeadas, normalizada a la unidad es:

$$dn(P) = \frac{1}{(4\pi/3)P_F^3} dP \quad (\text{B.4})$$

y las probabilidades de ocupación vienen dadas por:

$$f(P) = 1 \quad \text{si } P \leq P_F \quad (\text{B.5})$$

y

$$f(P) = 0 \quad \text{si } P > P_F \quad (\text{B.6})$$

La conservación del momento total y el principio de Pauli pueden ser considerados geoméricamente dibujando una esfera centrada en  $O'$ , el centro de masas de los dos nucleones que colisionan, con radio  $K$  (ver figura B.1).

La conservación de momento requiere que el extremo de los vectores del momento de los nucleones después de la interacción coincidan con la superficie de la esfera centrada en  $O'$ . Para satisfacer el principio de Pauli, las interacciones permitidas serán aquellas que dejen a las partículas finales dentro del ángulo sólido  $d\Omega'$  construido mediante la rotación de la zona sombreada de la figura B.1 alrededor del eje  $OC$ .

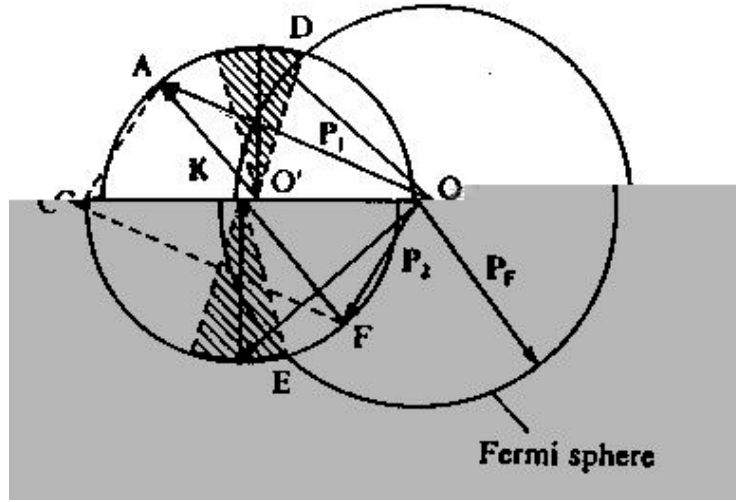


Figura B.1: Descripción en el espacio de momentos de la interacción entre una partícula incidente con momento  $P_1$  con un nucleón del blanco con momento  $P_2$  [29].

La expresión final para  $\bar{\sigma}$  viene dada por:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{P_1(4\pi/3)P_F^3} \int dP_2 \int d\Omega' 2K\sigma(K, K') \quad (\text{B.7})$$

Esta expresión se integra asumiendo que la sección eficaz nucleón-nucleón es isotrópica en el centro de masas, lo cual es cierto únicamente a baja energías relativas. Adicionalmente se supone que bien (a) la sección eficaz nucleón-nucleón es independiente de la energía:

$$\sigma(K, K') = \frac{C}{4\pi} \quad (\text{B.8})$$

APÉNDICE B. EVALUACIÓN DE LA SECCIÓN EFICAZ MEDIA  $\bar{\sigma}$   
NUCLEÓN-NUCLEÓN

---

o (b) que esta sección eficaz varía inversamente con la energía relativa de los dos nucleones:

$$\sigma(K, K') = \frac{C'}{4\pi K^2} \quad (\text{B.9})$$

Esta integración sobre  $d\Omega'$  es igual a:

$$\Omega' = 4\pi - 4\pi \int_0^\theta \sin \theta d\theta = 4\pi \cos \theta = 2\pi \frac{P_1^2 + P_2^2 - 2P_F^2}{K |P_1 + P_2|} \quad (\text{B.10})$$

donde  $\theta$  es el ángulo  $OO'D$  y el resultado final se obtiene aplicando el teorema de Carnot a los triángulos  $OO'D$ ,  $OAF$  y  $OAC$ . Como  $\Omega'$  debe ser mayor que cero, se tiene que:

$$P_2^2 \geq 2P_F^2 - P_1^2 \quad (\text{B.11})$$

con lo cual se obtienen los límites de integración para la ecuación B.7:

$$0 \leq P_2^2 \leq P_F^2 \quad \text{si } P_1^2 \geq 2P_F^2 \quad (\text{B.12})$$

y

$$2P_F^2 - P_1^2 > P_2^2 \leq P_F^2 \quad \text{si } P_1^2 \leq 2P_F^2 \quad (\text{B.13})$$

En la aproximación (a) la integral B.7 resulta ser:

$$\bar{\sigma} = \frac{3C}{2P_1 P_F^3} \int dP_2 (P_1^2 + P_2^2 - 2P_F^2) P_2^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta'}{|P_1 + P_2|} d\theta' \quad (\text{B.14})$$

donde  $\theta'$  es el ángulo entre  $P_1$  y  $P_2$  y

$$|P_1 + P_2| = (P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 P_2 \cos \theta')^{1/2} \quad (\text{B.15})$$

Kikuchi y Kawai [29] obtuvieron la expresión final de  $\bar{\sigma}$  como el producto de la sección eficaz correspondiente a la interacción libre del nucleón incidente con energía  $E_1 = P_1^2/2M$  con los nucleones del blanco y una función de la variable  $\zeta = E_F/E_1$ ,

$$\bar{\sigma} = \sigma_{libre}(E_1) P_a(\zeta) \quad (\text{B.16})$$

donde

$$P_a(\zeta) = 1 - \frac{7}{5}\zeta \quad \text{si } \zeta \leq \frac{1}{2} \quad (\text{B.17})$$

y

$$P_a(\zeta) = 1 - \frac{7}{5}\zeta + \frac{2}{5}\zeta \left(2 - \frac{1}{\zeta}\right)^{5/2} \quad \text{si } \zeta > \frac{1}{2} \quad (\text{B.18})$$



En el caso de la aproximación (b), la integral B.7 no se puede resolver analíticamente. El valor final de  $\bar{\sigma}$  [53, 54] viene dado por una expresión similar a la de la aproximación (a), utilizando una nueva función  $P_b$  dada por:

$$P_b(\zeta) = \frac{3}{2}\zeta^{-3/2} \int_a^{\sqrt{\zeta}} \frac{t(1+t^2-2\zeta)}{[2(1+t^2)]^{1/2}} \tanh^{-1} \frac{2t[2(1+t^2)]^{1/2}}{1+3t^2} dt \quad (\text{B.19})$$

donde  $t = P_2/P_1$  y

$$a = 0 \quad \text{si } \zeta > 2 \quad (\text{B.20})$$

y

$$a = \sqrt{2\zeta - 1} \quad \text{si } \zeta \leq 2 \quad (\text{B.21})$$

Las funciones  $P_a$  y  $P_b$  no difieren demasiado como se puede ver en la figura B.2.

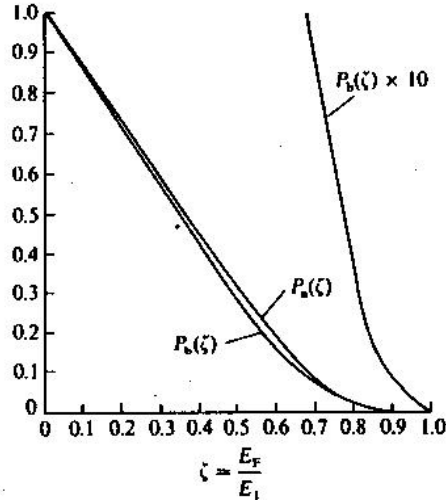


Figura B.2: Funciones  $P_a(\zeta)$  y  $P_b(\zeta)$  en función de  $\zeta$  [29].

Collins y Griffin [56] estudiaron la precisión de la aproximación en la que se asume que la sección eficaz libre nucleón-nucleón es isotrópica en el centro de masas. Según estos autores, esta aproximación subestima muy débilmente la sección eficaz promedio calculada teniendo en cuenta la anisotropía (en torno a un 5%).

## APÉNDICE B. EVALUACIÓN DE LA SECCIÓN EFICAZ MEDIA $\bar{\sigma}$ NUCLEÓN-NUCLEÓN

---

La sección eficaz libre nucleón-nucleón se mantiene constante únicamente a altas energías ( $200MeV$  para las interacciones  $p-p$  y  $n-n$  y  $400MeV$  para las  $n-p$ ). A energías inferiores la sección eficaz libre puede venir expresada según las fórmulas propuestas por Lock [57].

Considerando las pequeñas diferencias entre  $P_a$  y  $P_b$ , se pueden utilizar las expresiones anteriores corregidas con la función  $P_a$  para evaluar la sección eficaz promedio nucleón-nucleón. Finalmente, la sección eficaz media  $\bar{\sigma}$  se calcula teniendo en cuenta la composición del núcleo blanco, de modo que para un proyectil de isospín  $x$  se obtiene:

$$\bar{\sigma} = \frac{Z\bar{\sigma}_{ip} + N\bar{\sigma}_{in}}{A} \quad (\text{B.22})$$

---



# Bibliografía

- [1] N. Bohr, Nature 137 (1936) 344
- [2] E. Fermi, E. Amaldi, O.D'agostino, F. Rasetti, E. Segré, Proc. Roy. Soc A 146 (1934) 483
- [3] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segré, Proc. Roy. Soc A 149 (1935) 522
- [4] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, E. Segré, La Ricerca Scientifica A 6 (1935) 435
- [5] L. Szilard, Nature 136 (1935) 849
- [6] O.R. Frisch, G. Hevesy, H.A.C. McKay, Nature 137 (1936) 149
- [7] O.R. Frisch, G. Placzek 137 (1936) 357
- [8] V.F. Weisskopf, D.H. Ewing, Phys. Rev. 57 (1940) 472
- [9] W. Hauser, H. Feshbach, Phys. Rev. 87 (1952) 366
- [10] J.R. Oppenheimer, M. Phillips, Phys. Rev. 48 (1935) 500
- [11] R.Serber, Phys. Rev. 72 (1947) 108
- [12] B.B. Cunningham, H.M. Hopkins, M. Lindner, D.R. Miller, P.R. O'Connor, I. Perlman, G.T. Seaborg, R.C. Thompson, Phys. Rev. 72 (1947) 739
- [13] G.T. Seaborg, B.B. Cunningham, H.M. Hopkins, M. Lindner, M. Lindner, P.R. O'Connor, I. Perlman, R.C. Thompson, Phys. Rev. 72 (1947) 740

- [14] F.E Bertrand, R.W. Peelle, Phys. Rev. C8 (1973) 1045
- [15] M. Blann, Ann. Rev. Nucl. Sci. 25 (1975) 123
- [16] C. Biratti, E. Gadioli, Erba.E. Gadioli, A.M. Grassi Strini, G. Strini, G. Tagliaferri, Nucl. Phys. A201 (1973) 579
- [17] Z. Lewandowski, E. Loeffler, R. Wagner, H.H. Müller, W. Reichart, P. Schober, E. Gadioli, Erba E. Gadioli, Nuovo Cim. Lett. 28 (1980) 15
- [18] R.Serber, Phys. Rev. 72 (1947) 1114
- [19] B. Block, H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y.) 23 (1963) 47
- [20] N. Metropolis, R. Bivins, M. Storm, J.M. Miller, G. Friedlander, A. Turkievich, Phys. Rev. 110 (1958) 204
- [21] K. Chen, Z. Fraenkel, G. Friedlander, J.R. Grover, J.M. Miller, Y. Shimamoto, Phys. Rev. 166 (1968) 949
- [22] K. Chen, G. Friedlander, J.M. Miller, Phys. Rev. 176 (1968) 1208
- [23] K. Chen, G. Friedlander, G.D. Harp, J.M. Miller, Phys. Rev. C4 (1971) 2234
- [24] J.J. Griffin, Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 478
- [25] M. Blann, Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 337, 27 (1971) 700(E), 27 (1971) 1550(E)
- [26] M. Blann, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 757
- [27] G.D.Harp, J.M. Miller, B.J, Berne, Phys. Rev. 165 (1968) 1166
- [28] T. Ericson, Adv. Phys. 9 (1960) 425
- [29] K. Kikuchi, M. Kawai, Nuclear matter and nuclear reactions. North-Holland, Amsterdam (1968)
- [30] E. Gadioli, P.E. Hodgson, Pre-equilibrium Nuclear Reactions .Oxford University Press (1992), capítulo 2
- [31] W. Swenson, N. Cindro, Phys. Rev. 123 (1961) 910

- [32] R.W. West, Phys. Rev. 141 (1966) 1033
- [33] M. Blann, H.K. Vonach, Phys. Rev. C28 (1983) 1475
- [34] J.R. Wu, C.C. Chang, H.D. Holmgren, Phys. Rev. C19 (1979) 698
- [35] A.M. Kalend, B.D. Anderson, A.R. Baldwin, R. Madey, J.W. Watson, C.C. Chang, H.D. Holmgren, R.W. Koontz, J.R. Wu, H. Machner, Phys. Rev. C28 (1983) 105
- [36] J.J. Gaimard, K.-H. Schmidt, Nucl. Phys. A531 (1991) 709
- [37] M. Blann, F. Plasil, University of Rochester, Report COO-3493-10 (1973) (sin publicar)
- [38] M. Blann, University of Rochester, Report COO-3493-29 (1973) (sin publicar)
- [39] M. Blann, J. Bisplinghoff, Lawrence Livermore National Laboratory, Report UCID 19614 (1983) (sin publicar)
- [40] Karol, Phys. Rev. C11 (1975) 1203
- [41] T. Bohm, K.-H.Schmidt, Nucl. Phys. A569 (1994) 821
- [42] Y. Avishai, Z. Phys. A286 (1978) 285
- [43] M. Blann, Nucl. Phys. A213 (1973) 570
- [44] M. Böhning, Nucl. Phys, A152 (1970) 529
- [45] L. Euler, Opera mathematics, Vol 2, Berlin (1915) 254
- [46] Jr.F.C. Williams, Nucl. Phys. A166 (1971) 231
- [47] E. Běták, J. Dobeš, Z. Phys. A279 (1976) 319
- [48] P. Obložinský, Nucl. Phys. A453 (1986) 127
- [49] M.L. Goldberger, Phys. Rev. 74 (1948) 1269
- [50] Y. Yamaguchi, Progr. Theor. Phys. (Kyoto) 5 (1950) 332
- [51] A. Kind, Nuovo Cim. 10 (1953) 176

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [52] A. Kind, G. Patergnani, *Nuovo Cim.* 10 (1953) 1375
- [53] E. Clementel, C. Villi, *Nuovo Cim.* 12 (1955) 175
- [54] S. Hayakawa, M. Kawai, K. Kikuchi, *Progr. Theor. Phys. (Kyoto)* 13 (1955) 415
- [55] A. Ferrero, E. Gadioli, Erba E. Gadioli, I. Iori, N. Molho, L. Zetta, *Z. Phys.* A293 (1979) 123
- [56] M.T. Collins, J.J. Griffin, *Nucl. Phys.* A348 (1980) 63
- [57] Lock, Measday, *Intermediate energy Nuclear Physics*, London (1970) 180